Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 517.95

МАТЕМАТИКА

Э. Б. БЫХОВСКИЙ

КРАЕВАЯ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧИ «В ЦЕЛОМ» ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 VII 1973)

Рассматривается краевая задача для уравнения

$$\frac{d}{dx_k} a_k(x,u)+b(x,u)+cu=0; \tag{1}$$

Здесь $u(x)$ — скалярная неизвестная функция, $a_k(x, u)$ — компоненты вектора $\mathbf{a}(x, u)$ в системе координат $(x_1 \ldots x_n)$, d/dx_k — дифференцирование с учетом зависимости u от x. Дифференцирование по u будем обозначать штрихом.

Уравнение (1) эволюционно, если в пространстве x существует такое направление, что проекция на него вектора $\mathbf{a}'(x, u)$, задающего направление характеристик, имеет неизменный определенный знак. Без умаления общности можно считать таким направлением ось x_1. Для эволюционных уравнений хорошо изучена задача Коши. В (1) изучение ведется в оказавшемся здесь естественным пространстве BV, а в (2) рассматривается решение из L_∞; в (3) в случае двух независимых переменных рассмотрена начально-краевая задача. В данной работе, как и в (3), мы пользуемся рядом методов и результатов работы (1), однако взамен эволюционности предполагается, что константа c в (1) достаточно велика. Вместо эволюционных неравенств применяются соответствующие «стационарные», при этом следует отметить, что если уравнение (1) эволюционно, никаких предположений о c при нашей методике делать не нужно, так как при замене $u=v\exp(\lambda x_1)$ приходим к уравнению с любым нужным c (законность этой замены для задачи в неклассическом смысле можно оправдать).

Подобно большинству предыдущих работ, задача исследуется методом введения в (1) «малой вязкости» $\mu\mathscr{L}u$ ($\mathscr{L}$ — произвольный линейный эллиптический оператор с гладкими коэффициентами). Однако и в эволюционном случае $\mathscr{L}$ у нас продолжает содержать дифференцирование по всем координатам («пространственно-временная» вязкость) в отличие от ранее рассматривавшейся вязкости пространственной. Хотя эволюционные неравенства, получающиеся при применении последней, тоньше наших, введение пространственно-временной вязкости позволило унифицированно рассмотреть неэволюционные задачи, задачи с подвижными границами и т. д.

Уравнение (1) рассматривается в n-мерной области Ω, без умаления общности ограниченной. Пусть $\partial\Omega=S\in C^2$; ν — внешняя нормаль к S, a_ν — нормальная компонента $\mathbf{a}$. В дальнейшем в силу принципа максимума промежуток $[m, M]$ изменения u будет предопределяться граничными условиями. В различных местах накладываются такие условия на $a_\nu(x, u)$ (они формулируются для $x\in S$):

1.1) $[m, M]$ можно разделить максимум на два промежутка, в каждом из которых $a_\nu(x, u)$ (нестрого) монотонна по u.

1.2) То же, но монотонность строгая в смысле неравенства нулю функции $a_\nu'(x, u)$.

1.3) Пусть при условии 1,2) $u_0(x)\in(m, M)$ — точка экстремума по u функции $a_\nu(x, u)$. Тогда для значений u из того промежутка, где $a_\nu'(x, u)<0$, выполнено неравенство $a_\nu'(x, u)\leqslant -\varkappa|u-u_0|^\beta$ ($\varkappa$, β — положительные константы).

1.4) Предыдущие свойства устойчивы при достаточно малом сдвиге точки x и достаточно малом изменении направления ν проектирования вектора $\mathbf{a}$.

Замечание. Если не считать предположения 1.4), затрагивающего точки $x \in \Omega$, близкие к S, для внутренних точек Ω никаких предположений не делается. Относительно c предполагается, что эта константа достаточно велика сравнительно с $|b|$, $|b'|$, $|\mathbf{a}'|$, $|\partial \mathbf{a}/\partial x_k|$, $|\partial \mathbf{a}'/\partial x_k|$ и градиентом функции f, входящей в граничные условия краевой задачи. О коэффициентах делаются также предположения, обеспечивающие справедливость принципа максимума для (1) после введения в него вязкости. Коэффициенты $a_k(x, u)$ имеют все непрерывные производные до 2-го порядка.

Постановка задачи. Решение уравнения (1) ищется в классе $L_\infty \cap BV(\Omega)$, так что главные члены в (1) суть заряды ([4]). К (1) присоединяется условие единственности в форме из ([1]): для произвольной константы C должно выполняться неравенство

$$\frac{d}{dx_k}[a_k(x,u)-a_k(x,C)]\operatorname{Sgn}(u-C)+[b(x,u)-b(x,C)]\operatorname{Sgn}(u-C)+$$
$$+\frac{\partial a_k(x,C)}{\partial x_k}\operatorname{Sgn}(u-C)+c|u-C|\leqslant 0. \tag{2}$$

Перейдем к граничным условиям. Обозначим через S_1 и S_2 те части S, в точках которых $a_\nu'(x, u) \geqslant 0$ (соответственно <0) при всех $u \in [m, M]$. Положим $S_3 = S \setminus S_1 \cup S_2$. Пусть $x \in S_3$ и $u_0(x)$ — точка экстремума по u функции $a_\nu(x, u)$. Пусть S_{31} — произвольное подмножество S_3 с гладкой границей (разному выбору S_{31} отвечают разные задачи). Положим $S_{32} = S_3 \setminus S_{31}$.

Граничные условия. На S_1 условий не ставится; на S_2: $u = f(x)$, где $f(x)$ — заданная функция; на S_{31}: $a_\nu'(x, u(x)) \geqslant 0$; на S_{32}: $u(x) = f(x)$, где заданная функция $f(x)$ такова, что $a_\nu'(x, f(x)) < 0$. Если на $f(x)$ при $x \in S_{32}$ не наложено добавочных требований, то, как видно из примера в ([3]), решение может не существовать, ибо значения $f(x)$ могут «сдуваться» значениями u, приходящими из Ω по характеристикам, направленным в рассматриваемых точках S наружу Ω. Подробнее об «условии несдуваемости» сказано в конце заметки.

Замечание. На самом деле существование решения доказывается при следующем условии на S_{32}: $a_\nu'(x, u(x)) - a_\nu'(x, f(x)) = 0$ (единственность при этом тривиально сохраняется). Доказательство того, что фактически на S_{32} выполняется первый вариант условия, у нас не проведено.

Теорема единственности. *При предположении* 1.1) *и условии* $c > \max|b' + \partial a_k'/\partial x_k|$, *где максимум берется по* $x \in \Omega$ *и* $u \in [m, M]$, *краевая задача имеет не более одного решения со значениями из* $[m, M]$.

Схема доказательства совпадает со случаем задачи Коши. Неравенство (2) сохраняется, если вместо C подставить в него другое решение $v(x)$. После интегрирования по Ω получаемые граничные интегралы оказываются в силу граничных условий знакоопределенными, а условие на c обеспечивает превалирование $c\int_\Omega |u-v|\,dx$ над остальными интегралами по Ω.

Постановка регуляризованной задачи. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx_k}a_k(x,u^\mu)+b(x,u^\mu)+cu^\mu=\mu\mathscr{L}u^\mu. \tag{3}$$

Далее, граничную функцию $g(x)$ определим так: $g(x) = f(x)$ на S_2 и S_{32}; $g(x) = u_0(x)$ на S_{31} и $g(x)$ — произвольная гладкая функция на S_1. С точки зрения дальнейших технических приемов недостатком $g(x)$ является ее разрывность. Рассматриваются ее гладкие аппроксимации $g^\mu(x)$, обладающие рядом свойств, в числе которых ограниченность величин $|g^\mu(x)|$,

$\iint\limits_S |\nabla g^\mu|\,dS$, $\mu\|g^\mu(x)\|_{W_1^2(S)}$ равномерно по μ. Для справедливости этих свойств необходимы ограничения на границы рассматриваемых частей S, скажем, их кусочная гладкость. Таким образом, к уравнению (3) присоединяется условие $u^\mu|_S = g^\mu(x)$.

Теорема о компактности. *Пусть коэффициент с уравнения* (3) *удовлетворяет условиям*

$$\max|b'+\partial a_k'/\partial x_k| < c$$

(*максимум берется по* $x\in\Omega$ *и* $-\infty<u<+\infty$; *это условие для принципа максимума*) *и*

$$c > L\left(\max|b'| + \sum_{k=1}^{n}\max|a_k'|\right),$$

где максимумы берутся по $x\in\Omega$ *и* $u\in[m, M]$, *а* L — *достаточно большая константа, не зависящая от коэффициентов уравнения. Тогда*

$$m\leqslant u^\mu(x)\leqslant M;\quad \int\limits_\Omega|\nabla u^\mu|\,d\Omega\leqslant K$$

(*константы* m, M, K *не зависят от* μ). *Поэтому семейство функций* $u^\mu(x)$ *компактно в* $L_1(\Omega)$ *и для каждой предельной функции* $u(x)$, $m\leqslant u(x)\leqslant M$, $u(x)\in\overline{BV}(\Omega)$.

Доказательство, подобно задаче Коши, начинается с дифференцирования уравнения (3) по x_i, умножения на Sgn $(\partial u^\mu/\partial x_i)$ и интегрирования по Ω. Удобно, однако, провести предварительное распрямление границы по кускам и введение срезающих функций, так что дело сведется к полупространству и финитному решению. Используются приемы, предложенные в ([1]) и ([5]). Основным моментом является рассмотрение граничных интегралов, при котором все они оцениваются через известные граничные функции, граничные интегралы от $\mu|\partial u^\mu/\partial\nu|$ и второстепенные члены. Доминирует член $\int\limits_\Omega c|\nabla u^\mu|\,dx$, что и дает нужный результат. При этом для оценки членов с $\partial u^\mu/\partial\nu$ используется

Лемма. *Пусть* $u^\mu(x)$ — *решение уравнения*

$$d_k(x, u^\mu)\,\partial u^\mu/\partial x_k + b(x, u^\mu) - \mu\mathscr{L}u^\mu = 0$$

в области Ω, *удовлетворяющее на ее гладкой границе* S *условиям* $u^\mu(x) = g^\mu(x)$, *где точечные значения производных 1-го и 2-го порядка* g^μ *на* S *оцениваются соответственно через* $K_1\mu^{-1}$ *и* $K_1\mu^{-2}$. *Пусть* $|u^\mu(x)|\leqslant N$ (K_1, N — *положительные константы, не зависящие от* μ).

Тогда в граничных точках справедлива оценка

$$|\partial u^\mu/\partial\nu|\leqslant K_2\mu^{-1}.$$

Доказательство проводится путем построения специальных барьеров. Оценки такого типа, ведущие свое начало от работ С. Н. Бернштейна, имеются в ([6]). Однако там рассматриваются весьма общие квазилинейные уравнения, ввиду чего в правой части константа μ входит экспоненциальным образом.

Удовлетворение граничным условиям. Если $u(x)\in\overline{BV}(\Omega)$, то (см. ([1])) можно говорить о ее «внутреннем следе» на S. Дальнейшие рассмотрения состоят в доказательстве принятия (каждой) предельной функцией $u(x)$ граничных условий исходной задачи. Для каждой фигурирующей в этих условиях части S (точнее, для достаточно малых кусков этой части) строится свой барьер или система барьеров.

Граничное условие на S_{31}. Здесь предполагается, что $a_\nu(x, u)$ удовлетворяет условиям 1.2) — 1.4). Пусть Γ — достаточно малая часть S_{31}, $\Gamma\cup\Gamma_\delta$ — δ-расширение Γ для согласования фигурирующих далее граничных функций, Q — часть Ω, примыкающая к Γ и ограниченная еще поверхностью Γ (в ходе построений приходится придавать области Q специальную форму). Можно построить функцию v такую, что $a_k'(x, v)\cdot \partial v/\partial x_k - \mu\mathscr{L}v < -K_3 < 0$; $v|_\Gamma = u_0(x)$, $v|_{\Gamma\delta\cup\Gamma} \leqslant m$. Отсюда (используя возможность выбора константы K_3 достаточно большой) легко получить $u^\mu \geqslant v$ в Q, что и приведет в пределе к граничному условию на S_{31}.

Граничное условие на S_{32}. Условия на $a_\nu(x, u)$ такие же, как в предыдущем случае. Достаточно установить оценку $|\partial u^\mu/\partial\nu|_{S_{32}} \leqslant K_4$. Пусть для определенности в точках рассматриваемого куска Γ функция $a_\nu(x, u)$ имеет при $u=u_0(x)$ минимум. Тогда трудная часть задачи заключается в оценке снизу. Для построения подходящего семейства барьеров v^μ используется идея линеаризации, в простейшем случае предложенная в [3]. v^μ суть решения линейного уравнения с кусочно-постоянным старшим коэффициентом, причем значения постоянных подбираются специальным образом. Решающим является асимптотика при $\mu\to 0$ решений v^μ на многообразии разрыва старшего коэффициента. Оценка же $\partial u^\mu/\partial\nu$ сверху особого труда не представляет. Пусть функция $a_\nu(x, u)$, $x\in S_{32}$, имеет в точке $u_0\in[m, M]$ минимум. Положим

$$\hat{a}_\nu(x, u) = a_\nu(x, m) + \int_m^u \max_{z\in[m,t]} a_\nu'(x, z)\,dt.$$

Имеем $\hat{a}_\nu'' \geqslant 0$ и $\hat{a}_\nu = a_\nu$, если $a_\nu'' \geqslant 0$. Пусть $B^0 = \max\limits_{u\in[m-1,\, M+1]} |\mathbf{a}_\tau'(x, u)|$, где $\mathbf{a}_\tau$ — касательная компонента вектора $\mathbf{a}$.

Положим

$$\Psi_{x,M}(u) = u + \frac{M-u}{\hat{a}_\nu'(x, u)}\,\frac{\hat{a}_\nu'(x, M)^2 + (B^0)^2}{\hat{a}_\nu'(x, M)}.$$

На промежутке $u\in[f(x), u_0(x)]$ функция Ψ ограничена сверху ($\Psi\to-\infty$ при $u\uparrow u_0$). Положим $R(x, M) = \max\limits_{f\leqslant u\leqslant u_0} \Psi_{x,M}(u)$. В случае, когда $a_\nu(x, u)$ имеет в точке $u_0\in(m, M)$ максимум, аналогично вводятся функции $\Psi_{x,m}(u)$ и $R^1(x, m)$.

Теорема. *Пусть:*

1) *$a_\nu'(x, u)$ в точках S_{32} удовлетворяет условиям* 1.2) *и* 1.4).

2) *Функция $f(x)$ на S_{32} удовлетворяет неравенству $f(x) < R(x, M)$, если $a_\nu(x, u)$ имеет при $u=u_0$ минимум, и неравенству $f(x) > R^1(x, m)$, если максимум.*

Тогда для решений u^μ регуляризованной задачи имеет место на S_{32} оценка

$$|\partial u^\mu/\partial\nu| \leqslant K_4.$$

Замечание. Обсудим условие 2) на примере задачи для уравнения $\partial u/\partial t + {}^1/_2\,\partial u^2/\partial x = 0$ в квадранте $x<0$, $t>0$ при условиях $u|_{x=0} = f = \mathrm{const}$; $u|_{t=0} = M$. Известно, что точным условием существования решения является $f \leqslant -M$. У нас $\Psi_{x,M}(u) = u + (M^2+1)(1/u - 1/M)$. Если $f > -M$, то выполнение неравенства $f(x) < R(x, M)$ невозможно. Если $f < -(M^2+1)^{1/2}$, то $R(x, M) = -2(M^2+1)^{1/2} - M^{-1}(M^2+1)$, так что при больших M точное условие завышается втрое. Рассмотрение граничного условия на S_2 большого труда по сравнению с предыдущими случаями не представляет.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. И. Вольперт*, Матем. сборн., т. 73, 2, 225 (1967). [2] *С. М. Кружков*, Матем. сборн., т. 81, 2, 228 (1970). [3] *Э. Б. Быховский*, ДАН, т. 202, № 3, 511 (1972). [4] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1972. [5] *А. И. Вольперт, С. И. Худяев*, Матем. сборн., т. 78, 3, 374 (1972). [6] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964.