Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 517.944/947 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ВЕДЕНЯПИН

О РАЗРЕШИМОСТИ В ЦЕЛОМ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 28 VI 1973)

1. Дано n взаимодействующих веществ. Пусть в момент времени t количество i-го есть $z_i(t)$. Если взаимодействие таково, что скорость увеличения количества i-го вещества зависит как-то от количества всех веществ и равна $F_i(z_1, \ldots, z_n)$, то изменение z_i описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz_i/dt = F_i(z_1, \ldots, z_n), \quad i=1, \ldots, n. \tag{1}$$

Предположим теперь, что i-е вещество распределено в момент t в пространстве R^k с плотностью $z_i(t, \mathbf{x})$ и движется со скоростью $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{x} \in R^k$. Дифференциальные уравнения заменяются на уравнения в частных производных

$$\partial z_i/\partial t + (\nabla_{\mathbf{x}} z_i, \mathbf{v}_i) = F_i(z_1, \ldots, z_n), \quad i=1, \ldots, n. \tag{2}$$

Систему (2) мы будем называть *системой кинетических уравнений*. Назовем ее *Б-системой* (*больцмановской системой*), если [1]

$$F_i(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k,l,j} \sigma_{kl}^{ij} (z_k z_l - z_i z_j) = \sum_{k,l,j} \sigma_{kl}^{ij} z_k z_l - z_i \Bigl(\sum_{k,l,j} \sigma_{kl}^{ij} z_j \Bigr),$$

где $\sigma_{kl}^{ij} = \sigma_{ij}^{kl}$. Слагаемое klj в сумме отвечает реакции $(k, l) \to (i, j)$. Скорость течения этой реакции равна $\sigma_{kl}^{ij} z_k z_l$.

Б-системы (2) служат моделями для уравнения Больцмана из теории газов. Для него и для (2) в общем случае доказана лишь теорема существования в малом. Качественное поведение решений пространственно-однородных Б-систем (1) легко описывается, и, отталкиваясь от этого, Карлеман [2] для пространственно-однородного уравнения Больцмана построил решение в целом и доказал сходимость его при $t \to +\infty$ к максвелловскому распределению.

Будем рассматривать задачу Коши для уравнения (2) при следующих предположениях:

а) F_i — непрерывно дифференцируемы на R^n;

б) $\mathbf{F}(0) = 0$;

в) начальная функция $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$ непрерывна на R^k и финитна.

Нас будут интересовать обобщенные решения задачи Коши, т. е. такие функции $\mathbf{z}(t, \mathbf{x})$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in R^k$, что:

1) $\mathbf{z}(t, \mathbf{x})$ непрерывна на $R^+ \times R^k$ (здесь $R^+ = \{t \mid t \geqslant 0\}$);

2) $\mathbf{z}(t, \mathbf{x})$ есть предел по метрике $C^0(R^+ \times R^k)$ непрерывно дифференцируемых на $R^+ \times R^k$ решений (2). Из предположений б) и в) следует, в частности, что $\mathbf{z}(t, \mathbf{x})$ финитно по $\mathbf{x}$ при каждом $t > 0$.

В работе даны необходимые и достаточные условия следующих свойств (их определения будут даны ниже), системы (2): а) положительность, б) монотонность, в) справедливость принципа максимума, г) мажорантность. Даны приложения к Б-системам и к построению в целом решения задачи Коши.

2. Пусть $z^+(t)=\max\limits_{i,\,\mathbf{x}} z_i(t, \mathbf{x})$.

Теорема 1а (принцип максимума). *Пусть* $\mathbf{z}(t, \mathbf{x})$ — *финитное по* $\mathbf{x}$ *непрерывное решение системы кинетических уравнений* (2). *Условие* $z^+(t)\leqslant z_0^+$ *выполняется для всех* $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$, *если и только если* $\forall i$ *из условия* $z_i=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} z_k$ *следует* $F_i(z_1, \ldots, z_n)\leqslant 0$.

Теорема 1б. *Если* $F_i\leqslant Az_i$ *при* $z_i=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} z_k$ *вне параллелепипеда* $|z_j|\leqslant R$, $j=1, \ldots, n$, *то* $z^+(t)\leqslant\max(z_0^+, R)e^{At}$.

Определение. Система (2) называется положительной, если для всех неотрицательных начальных условий $z_{i0}(\mathbf{x})\geqslant 0$ $\forall i$ выполнены неравенства $z_i(t, \mathbf{x})\geqslant 0$ $\forall t>0$.

Теорема 2. *Система* (2) *положительна, если и только если* $\forall i$ $F_i(z_1, \ldots, z_n)\geqslant 0$ *при* $z_i=0$ *и* $z_k\geqslant 0$, $k\neq i$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{z}(t, \mathbf{x})$ — *решение системы* (2), *отвечающее начальному состоянию* $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$. *Пусть* A_i *и* B_i, $i=1, \ldots, m$; $m\leqslant n$, — *числа, связанные неравенствами* $A_i\leqslant 0\leqslant B_i$. *Неравенства* $A_i\leqslant z_i(t, \mathbf{x})\leqslant B_i$, $t\geqslant 0$, $\mathbf{x}\in R^k$, $i=1, \ldots, m$, *выполняются для любых* $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$ *таких, что* $A_i\leqslant z_{i0}\leqslant B_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, *если и только если* $\forall i$, $1\leqslant i\leqslant m$, $F_i\geqslant 0$ *при* $z_i=A_i$, $z_j\geqslant A_j$ *для* $1\leqslant j\leqslant m$, $j\neq i$, *и* $F_i\leqslant 0$ *при* $z_i=B_i$, $z_j\leqslant B_j$ *для* $1\leqslant j\leqslant m$, $j\neq i$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *с* $m=n$ *или условия теорем* 2 *и* 1а (*соответственно условия теорем* 2 *и* 1б).

Тогда справедлива теорема существования в целом задачи Коши для системы (2).

Следствие 2. Б-*системы положительны.*

Следствие 3. Б-*системы со свойствами*

$$\sum_{k,l}\sigma_{kl}^{ij}\geqslant\sum_{k,l}\sigma_{jl}^{ik}$$

для всех i, j *удовлетворяют условиям теоремы* 1а *и потому соответствующая задача Коши обладает решением в целом.*

Определение. Систему кинетических уравнений (2) назовем монотонной, если из $z_{i0}(\mathbf{x})\geqslant\tilde{z}_{i0}(\mathbf{x})$, $i=1, \ldots, n$, следует $z_i(t, \mathbf{x})\geqslant\tilde{z}_i(t, \mathbf{x})$, $i=1, \ldots, n$, для всех $t>0$.

Теорема 4. *Система* (2) *монотонна, если и только если* $\forall i$ $F_i(x_1, \ldots, x_n)\geqslant F_i(y_1, \ldots, y_n)$ *при* $x_i=y_i$ *и* $x_j\geqslant y_j$, $j\neq i$.

Следствие 4. Б-*система монотонна, если и только если* $\sigma_{kl}^{ij}=0$ *при* $i\neq j$, $k\neq l$, *т. е. если*

$$F_i=\sum_{j\neq i}\sigma_{ii}^{jj}z_j^2-\sigma_{ii}^{ii}z_i^2, \quad \sigma_{ii}^{ii}=\sum_{j\neq i}\sigma_{ii}^{ii}.$$

Б-уравнения следствия 4 называются моделями Карлемана ([2], стр. 109). Монотонность для них была доказана в ([3]). Это единственный класс Б-систем, для которых, насколько мне известно, раньше было построено решение в целом.

Теорема 5. *Рассмотрим две системы кинетических уравнений с одинаковыми левыми частями:*

$$\partial\xi_i/\partial t+(\nabla_{\mathbf{x}}\xi_i, \mathbf{v}_i)=F_i(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

$$\partial\eta_i/\partial t+(\nabla_{\mathbf{x}}\eta_i, \mathbf{v}_i)=G_i(\eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Тогда $\xi_i(t, \mathbf{x})\geqslant\eta_i(t, \mathbf{x})$ *для любых* $\xi_{i0}(\mathbf{x})\geqslant\eta_{i0}(\mathbf{x})$, $i=1, \ldots, n$, *если и только если* $\forall i$ $F_i(x_1, \ldots, x_n)\geqslant G_i(y_1, \ldots, y_n)$ *при* $x_i=y_i$ *и* $x_j\geqslant y_j$, $j\neq i$.

При выполнении условий теоремы 5 мы говорим, что первое уравнение мажорирует второе.

Теоремы 1—3 основаны на замечании, что в точке максимума функции z_i по переменной x в уравнении

$$\partial z_i/\partial t+(\nabla_x z_i,\ \mathbf{v}_i)=F_i(z_1,\ldots,\ z_n)$$

слагаемое $(\nabla_x z_i,\ \mathbf{v}_i)$ равно 0 и возрастание или убывание максимума зависит лишь от знака $F_i(z_1,\ldots,z_n)$.

Теоремы 4 и 5 получаются применением теоремы 2 к разности решений. Полные доказательства приведены в ([5]).

Все теоремы можно (и нужно) рассматривать как аналоги теорем для динамических систем (1), которые доказаны, например, в ([4]).

Я благодарю М. В. Масленникова за постоянное большое внимание к работе, многочисленные обсуждения.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
19 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. К. Годунов, У. М. Султангазин*, УМН, т. 26, 3, 3 (1971). [2] *Т. Карлеман*, Математические задачи кинетической теории газов, ИЛ, 1960. [3] *I. Kolodner*, Ann. Mat. Pura ed Appl., v. 63, 11 (1963). [4] *М. А. Красносельский*. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., 1966. [5] *В. В. Веденяпин*, О теореме существования в целом решений задачи Коши некоторых гиперболических нелинейных систем уравнений в частных производных (с приложениями к дискретным моделям уравнения Больцмана). Препринт Инст. прикл. матем. АН СССР, 1973.