Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 517.91 **МАТЕМАТИКА**

Ю. И. ГИЛЬДЕРМАН

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ЛИНЕЙНЫХ В КОНУСАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 VI 1973)

Будем рассматривать динамические системы с непрерывной правой частью, линейной в конусах. Так мы называем систему

$$\dot{X}=F(X), \quad X\in R_n, \tag{1}$$

если

$$F(X)=A_kX, \quad X\in U_k,\ k=1,2,\ldots,N, \quad \bigcup_{k=1}^{N} U_k=R_n, \quad \dim U_k\cap U_j\leqslant n-1, \tag{2}$$

где U_k — конечный n-мерный конус, а A_k — постоянная матрица такая, что

$$(A_k-A_j)X=0, \tag{3}$$

как только $X\in U_k\cap U_j$, $k\neq j$.

Равенство (2) обеспечивает линейность в конусах, а условие (3) — непрерывность правой части. Понятно, что при выполнении этих условий $F(X)\in\mathrm{Lip}\,(R_n)$.

В [1] было показано, что при $n=2$ для любой локальной схемы состояния равновесия с конечным числом исключительных направлений существует система с непрерывной правой частью, линейной в конусах, обладающая этой схемой.

В настоящей статье рассматривается вопрос о возможных схемах состояния равновесия у систем, линейных в конусах, в четномерном пространстве при $n>2$.

Введем

Определения. Будем говорить, что для системы (1) начало координат является *точкой покоя порядка q в данном телесном замкнутом конусе U с вершиной в начале*, если все траектории, входящие в U в начало координат, при $t\to+\infty$ (или при $t\to-\infty$) имеют общую касательную h и образуют многообразие размерности q. Если $q>0$, то исключительное направление h будем называть *направлением порядка q в конусе U*.

Если ни одна из траекторий (кроме самой точки покоя), проходящих в U, не входит в конусе в начало, то начало координат будем называть *точкой покоя нулевого порядка* (в этом случае $q=0$).

Если исключительное направление h входит в границу не более чем двух конусов, будем называть его *простым*.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть в фазовом пространстве задана конечная последовательность простых исключительных направлений фиксированных порядков так, что поле непрерывно.*

Тогда, если n четное, найдется система, линейная в конусах, обладающая заданным набором исключительных направлений и только этим набором.

Доказательству теоремы предпошлем лемму о траекториях в смежных клиньях.

Лемма. *Пусть n четное и U и U' — смежные клинья раствора меньше $\pi/2$ с $(n-1)$-мерной границей S. Пусть в каждом из этих клиньев задан порядок точки покоя так, что поле направлений в объединении этих клиньев непрерывно.*

Тогда найдется такая система с непрерывной правой частью, линейной в клиньях, порядки точки покоя которой в U и U' совпадают с заданными.

Доказательство. Заметим прежде всего, что матрицы A и A_1, соответствующие смежным клиньям U и U', связаны равенством

$$A_1=A+\alpha\beta, \tag{4}$$

где $\beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — нормаль к грани $S=U\cap U'$, а $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ — некоторый действительный вектор. Это равенство эквивалентно условию (3). Далее, очевидно, что клин U можно выбрать так, что требуемая фазовая картина в нем реализуется с помощью некоторой диагональной матрицы $A=\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ с действительными и различными a_i.

Теперь наша задача заключается в том, чтобы, распорядившись вектором α, построить матрицу A_1, реализующую требуемую фазовую картину в клине U'. Технически, однако, более удобными параметрами являются собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A_1, набор которых взаимно однозначно определяется вектором α.

В самом деле, рассмотрим сначала тот случай, когда граница S не содержит исключительного направления. В этом случае $\beta_s\neq 0$, $s=1, 2, \ldots, n$, и из характеристического уравнения

$$\det\|A+\alpha\beta-\lambda_i E\|=0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

эквивалентного системе

$$\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\beta_s\prod_{k\neq s}(a_k-\lambda_i)+\prod_{k=1}^{n}(a_k-\lambda_i)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

получаем

$$\alpha_s=(-1)^{n+s-1}\frac{1}{\beta_s'}\frac{W_{j\neq s}(a)}{W(a)}\prod_{k=1}^{n}(a_s-\lambda_k),$$

где $W(a)$ — определитель Вандермонда $\det\|a^{i-1}\|$, а $W_{j\neq s}(a)$ — определитель Вандермонда, образованный из тех же чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с пропуском a_s.

Кроме того, для компонент собственного вектора Y_i имеем

$$y_{si}=-\alpha_s\beta Y_i/(a_s-\lambda_i).$$

Поэтому, если $\bar\beta$ — нормаль к грани клина U', отличной от S, то условие $Y_i\in U'$ $(Y_i\notin U')$, т. е. неравенство

$$(\beta Y_i)(\bar\beta Y_i)>0 \ (<0),$$

принимает вид

$$Q_i(\lambda, \beta, \bar\beta)\equiv\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{\bar\beta_s}{\beta_s}\frac{W_{j\neq s}(a)}{W(a)}\prod_{k\neq i}(a_s-\lambda_k)>0 \ (<0). \tag{5}$$

Отсюда видно, что если в клине U' порядок точки покоя $q=0$, то для выполнения неравенства (5) для всех $i=1, 2, \ldots, n$ достаточно выбрать все $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такого же знака, как

$$c=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{\bar\beta_s}{\beta_s}\frac{W_{j\neq s}(a)}{W(a)}\neq 0,$$

и достаточно большими по модулю.

Если же $q \neq 0$, то мы получим требуемую фазовую картину в U', если сумеем выбрать различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ так, чтобы q корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ имели один и тот же знак, $n-q$ корней $\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_n$ — другой знак, λ_1 было бы наименьшим по модулю среди первых q, наконец, чтобы $Q_1(\lambda, \beta, \bar{\beta})>0$ и $Q_i(\lambda, \beta, \bar{\beta})<0$, $i=2, 3, \ldots, n$.

Пользуясь четностью n, можно показать, что корни λ_k с требуемыми свойствами найдутся, если вместо клина U' рассмотреть достаточно узкий клин U_ε, примыкающий к S с той же стороны, что и U'. После этого описанным ранее способом траектории продолжаются в клин $U' \setminus U_\varepsilon$ без исключительных направлений.

Аналогично рассматривается случай, когда грань S содержит исключительное направление.

Переходим к доказательству теоремы. Разобьем R_n на N клиньев, пересекающихся не более чем по $(n-1)$-мерной грани, с общим $(n-2)$-мерным ребром, проходящим через начало. Выделим среди клиньев два смежных клина U_1 и U_2. Остальные клинья обозначим U_k', $k=1, 2, \ldots, N'$. Из леммы следует, что последовательно, переходя от клина к клину, в $R_n \setminus U_1 \cup U_2$ можно построить систему, линейную в клиньях, обладающую в объединении $\bigcup_{k=1}^{N'} U_k'$ заданным набором порядков точки покоя. И теперь наша задача — достроить систему в $U_1 \cup U_2$ так, чтобы точка покоя в этом объединении имела нулевой порядок, а поле оставалось непрерывным.

Пусть S_1, S — грани клина U_1, а S, S_2 — грани клина U_2. Пусть β', β и β'' — их нормали. Пусть $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — матрица, соответствующая клину U_1', смежному к U_1 по грани S_1, A_1 и A_2 — матрицы, соответствующие клиньям U_1 и U_2, а $l=(1, 1, \ldots, 1)$ и $\beta'=(\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n')$ — векторы, определяющие общее $(n-2)$-мерное ребро всех клиньев. Положим $\beta''=-\varepsilon l-\beta'$ и $\beta=-\varepsilon l-2\beta'$, $\varepsilon>0$. Тогда собственные векторы матриц A_1 и A_2 будут лежать вне клиньев U_1 и U_2 соответственно, если вместе с характеристическими уравнениями

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \beta_s' \prod_{k \neq s} (a_k-\lambda_i') + \prod_{k=1}^{n} (a_k-\lambda_i') = 0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \left[(\beta_s'+\beta_s) \prod_{k \neq s} (a_k-\lambda_i'') + \sum_{r \neq s} \delta_r \begin{vmatrix} \beta_s' & \beta_r' \\ \beta_s & \beta_r \end{vmatrix} \prod_{k \neq r, s} (a_k-\lambda_i'') \right] +$$

$$+ \prod_{k=1}^{n} (a_k-\lambda_i'') + \sum_{s=1}^{n} \beta_s \delta_s \prod_{k \neq s} (a_k-\lambda_i'') = 0$$

матриц A_1 и A_2 будут удовлетворены неравенства

$$Q_i(\lambda', \beta', \beta'')<0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

$$\left[1+\varepsilon \sum_{s=1}^{n} \frac{\delta_s}{a_s-\lambda_i''}\right] \left[1-\varepsilon \sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha_s+\delta_s}{a_s-\lambda_1''}\right] > 0, \quad i=1, r, \ldots, n; \qquad (6)$$

здесь $\delta=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)=\delta''/\varepsilon+\delta'$, где δ'' и δ' — некоторые отличные от нуля постоянные, зависящие от фазовой картины вне $U_1 \cup U_2$.

Можно показать, что если α_s выбирать на плоскости

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s = 1 - \sum_{s=1}^{n} \delta_s,$$

то $n-1$ собственных векторов $Y_1'', \ldots, Y''_{n-1}$ матрицы A_2 будут лежать на плоскости $lY=0$ (и следовательно, вне U_2). При этом собственное число

$$\lambda_n''=\varepsilon\left(\sum_{s=1}^{n}\delta_s-1\right).$$

Подставив это λ_n'' в (6), мы сумеем распорядиться корнями λ_i' так, чтобы выполнялись все нужные равенства и неравенства для собственных векторов матрицы A_1 и оставшегося вектора Y_n'' матрицы A_2.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
12 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. И. Гильдерман*, Сибирск. матем. журн., т. 13, № 1, 63 (1972).