Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 532.592 ГИДРОМЕХАНИКА

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, ВЫЗВАННЫХ ДАВЛЕНИЕМ, ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА ЖИДКОСТИ НАД ВОЛНИСТЫМ ДНОМ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 6 VII 1973)

Дается точное решение задачи, если периодическое давление на поверхности задано некоторым бесконечным тригонометрическим рядом, а плоская линия дна является волнообразной периодической кривой, заданной также тригонометрическим рядом. Исследуется и особый случай, когда длина дуги волны линии дна совпадает с длиной установившейся свободной линейной волны, отвечающей взятой скорости потока при горизонтальном плоском дне и постоянном вдоль поверхности давлении. Здесь кратко излагаются полученные нами результаты. В нашей работе [1] была рассмотрена аналогичная задача, но при постоянном вдоль поверхности давлении.

Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, на которой давление p предполагается равным $p_0=p_0'+p_0(x)$; здесь $p_0'=\text{const}$, а $p_0(x)$ — заданная периодическая функция от x (см. ниже); снизу жидкость ограничена волнистым дном, которое пересекается вертикальной плоскостью течения по периодической волнообразной линии L — линии дна. Пусть поток обладает постоянной заданной средней горизонтальной скоростью c при $y=0$ (см. ниже) и направленной слева направо. Благодаря периодичности линии дна и функции $p_0(x)$, свободная поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость $-c$.

Пусть гребень одной волны кривой L расположен на некоторой вертикали и пусть кривая L, искомая волна и кривая, изображающая $p_0(x)$, симметричны относительно этой вертикали и вертикали линии L у середины ее впадины. Совместим ось Oy прямоугольной системы координат xOy с осью симметрии у гребня и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси Oy с линией дна, а ось Ox направим вправо по горизонтальной касательной к линии дна. Пусть период по x (или длина волны) линии дна равен λ. Примем угол с осью Ox, образованный касательной к линии L, заданным в виде функции $\Theta(s)$ от длины ее дуги s, и пусть

$$\Theta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\beta_n\sin\frac{n\pi s}{l}, \tag{1}$$

где ε — малый безразмерный положительный параметр, β_n — заданные действительные числа, причем ряд $\sum\varepsilon^n\beta_n$ сходится в круге радиуса $\varepsilon_0>0$; $2l$ — длина дуги линии L за период по x. Из параметрических уравнений линии L вытекает, что

$$\lambda=\lambda_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varepsilon^n, \quad \lambda_0=2l, \quad \lambda_1=0, \quad \lambda_2=-{}^1/_2\beta_1^2 l, \quad \lambda_3=0, \tag{2}$$

λ_n, $n=4, 5, \ldots$, — полиномы по β_i. Предполагается, что длина волны на поверхности жидкости также равна λ.

Плоскость течения xOy примем за плоскость комплексного переменного $z=x+iy$ и пусть φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w=\varphi+i\psi$ — комплексный потенциал скоростей.

Для вывода уравнений задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной, на прямоугольник $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, $0\leqslant\psi\leqslant\psi_0$ в плоскости w (здесь $\psi=\psi_0$ — расход потока в единицу времени; $\varphi_0=\lambda c$), а затем этот прямоугольник — на внутренность кругового кольца с центром в нуле плоскости $u=u_1+iu_2$. При этом отрезок $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, отвечающий свободной поверхности, перейдет в окружность внешнего круга единичного радиуса, а отрезок, соответствующий дну, перейдет в окружность внутреннего круга радиуса $r_0=\exp(-2\pi\psi_0/\varphi_0)$, меньшего единицы. Кольцо имеет разрез $(r_0, 1)$.

Выражение z через u определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du}=-\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{\exp[i\omega(u)]}{u}; \tag{3}$$

здесь

$$\omega(u)=\Phi+i\tau. \tag{4}$$

Из (3) и (4) при $u=e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса-вектора с осью u_1) получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$x=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{\theta} e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta, \qquad y=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{\theta} e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)\,d\eta. \tag{5}$$

Из предыдущего следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу вектора скорости $\mathfrak{q}$ с осью Ox и что

$$q=|\mathfrak{q}|=c\exp(\tau). \tag{6}$$

В силу симметрии искомой волны функция $\tau(\theta)=\tau(1, \theta)$ четная, а $\Phi(\theta)=\Phi(1, \theta)$ нечетная. Поэтому имеем разложения

$$-\tau(\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\theta, \qquad \Phi(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\theta.$$

Для функций $\tau^*(\theta)=\tau^*(r_0, \theta)$ и $\Phi^*(\theta)=\Phi(r_0, \theta)$ справедливы аналогичные разложения, но с другими A_n^* и B_n^*, $n=1, 2, \ldots$

Из интеграла Бернулли для поверхности, учтя по закону Лапласа силы поверхностного натяжения, после выделения линейных относительно Φ и τ слагаемых и определения y по второй формуле (5), получаем

$$\frac{d\Phi}{d\theta}=\nu\left\{\delta-1-(\delta+1)\tau+\varkappa\int\Phi(\eta)\,d\eta-S(\theta)(1-\tau)+F[\tau, \Phi, S, \delta]\right\},$$

$$F[\tau, \Phi, S, \delta]=\delta(e^{-\tau}-1+\tau)-(e^{\tau}-1-\tau)+\varkappa e^{-\tau}\int_0^{\theta}[e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)-\Phi(\eta)]\,d\eta-$$

$$-\varkappa\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta+\varkappa e^{-\tau}\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta-S(\theta)(e^{-\tau}-1+\tau), \tag{7}$$

где

$$\delta=2(C\rho-p_0')/(\rho c^2), \qquad \nu=\lambda c^2\rho/(4\pi\mu)=\nu^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\nu^{(n)}\varepsilon^n,$$

$$\nu^{(0)}=c^2\rho\lambda_0/(4\pi\mu), \qquad \varkappa=g\lambda/\pi c^2=\varkappa_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n\varepsilon^n,$$

$$\varkappa_0=g\lambda_0/(\pi c^2), \qquad \nu^{(n)}=(\nu^{(0)}/\lambda_0)\lambda_n, \qquad \varkappa_n=(\varkappa_0/\lambda_0)\lambda_n;$$

C — константа в интеграле Бернулли, g — ускорение силы тяжести, μ — капиллярная постоянная. Кроме того положено

$$p_0^*(x)=\frac{2p_0(x)}{\rho c^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n d_n\cos\frac{2\pi n}{\lambda}x,\qquad S(\theta)=p_0^*[x(\theta)],\tag{8}$$

где ε — тот же малый параметр, как и в (1); d_n — заданные действительные числа, причем ряд $\sum\varepsilon^n d_n$ сходится в круге радиуса $\varepsilon_0>0$ (см. (3)). Для получения $S(\theta)$ следует в (8) поставить $x(\theta)/\lambda$ из уравнения

$$\frac{x(\theta)}{\lambda}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta,\tag{9}$$

вытекающего из (5).

Преобразуем в (7) слагаемые, линейные относительно τ, Φ и ε, применяя, как и в ([2]), интегральные формулы, выражающие τ и τ^* через $d\Phi/d\theta$ и $d\Phi^*/d\theta$, и интегрирование по частям. Затем в фигурной скобке — множителе при $\nu^{(0)}$ — объединяем слагаемые (с коэффициентами 2 и $-\varkappa_0$) с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi/d\eta$ и разными ядрами

$$K(\eta,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{\nu_n'},\qquad K_2(\eta,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{n^2},$$

где $\nu_n'=n\,\mathrm{th}\,(2\pi n\psi_0/\varphi_0)$.

В уравнении (7) константы $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$, зависящие от c и l, считаются заданными, а δ определяется из условия периодичности $\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)$, которое при $\varepsilon\to0$ дает

$$\delta=1+\delta'(\varepsilon).\tag{10}$$

После всех преобразований и с учетом (10) уравнение (7) примет окончательный вид

$$\begin{aligned}\zeta(\theta)=\nu^{(0)}\Big\{&\int_0^{2\pi}K^*(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta+\delta'(\varepsilon)-2(2+\delta'(\varepsilon))\int_0^{2\pi}N(\eta,\theta)\zeta^*(\eta)\,d\eta+\\&+(2+\delta'(\varepsilon))A_0+\delta'(\varepsilon)\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta+\varkappa_0\int_0^{2\pi}K_2(\eta,0)\zeta(\eta)\,d\eta+\Psi(\theta,\varepsilon)\Big\}+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\nu^{(n)}\varepsilon^n\Big\{2\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta-\varkappa_0\int_0^{2\pi}K_2(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta+\ldots\Big\}\end{aligned}\tag{11}$$

(многоточие во второй фигурной скобке заменяет члены из первой, начиная со второго); здесь

$$\zeta(\theta)=d\Phi/d\theta,\qquad \zeta^*(\theta)=d\Phi^*/d\theta,$$

$$\begin{aligned}\Psi(\theta,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n\varepsilon^n\int_0^\theta\Phi(\eta)\,d\eta-S(\theta)\Big[1+A_0+\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta-\\-2\int_0^{2\pi}N(\eta,\theta)\zeta^*(\eta)\,d\eta\Big]+F[\tau,\Phi,S,1+\delta'(\varepsilon)],\end{aligned}\tag{12}$$

$$N(\eta,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{\nu_n^*},\qquad \frac{4}{\nu_n^{*2}}=\frac{1}{\nu_n'^2}-\frac{1}{n^2},\qquad \nu_n'\nu_n''=n^2,$$

$$K^*(\eta,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(\eta)\varphi(\theta)}{\nu_n},\qquad \nu_n=\frac{n^2}{2\nu_n''-\varkappa_0},\qquad \varphi_n(\theta)=\frac{\cos n\theta}{\pi^{1/2}}\tag{12}$$

ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta,\ \theta)$.

Если считать, что в выражении Ψ функция $\tau(\theta)$ взята так же, как и в ([2]), и $\Phi(\theta)=\int_0^\theta\zeta(\eta)d\eta$, то (11) будет нелинейным интегральным уравнением для $\zeta(\theta)$.

Условие периодичности функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\delta'(\varepsilon)=X(\zeta,\ \delta',\ A_0,\ \Psi),\tag{13}$$

где функционал X аналогичен полученному в ([2]).

Уравнения для определения функций $\zeta^*(\theta)$, $s(\theta)$ — длины дуги линии дна и коэффициента A_0 в (11) выводятся так же, как в ([2]), и имеют вид

$$\zeta^*(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\beta_n\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi s(\theta)}{l}\frac{ds(\theta)}{d\theta},\tag{14}$$

$$s(\theta)=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta\exp[-\tau^*(\eta)]d\eta,\tag{15}$$

$$2l\exp(-A_0)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[-\tau^*(-\eta)-A_0]d\eta.\tag{16}$$

Таким образом, задача свелась к определению четырех функций $\zeta(\theta,\ \varepsilon)$, $\zeta^*(\theta,\ \varepsilon)$, $x(\theta,\ \varepsilon)/\lambda$ и $s(\theta,\ \varepsilon)$ и двух констант $\delta=1+\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ из шести нелинейных уравнений (9), (11), (13)–(16) с учетом интегральных формул ([2]) для $\tau(\theta)$ и $\tau^*(\theta)$ и при $\Phi(\theta,\ \varepsilon)=\int_0^\theta\zeta(\eta,\ \varepsilon)\ d\eta$, $\Phi^*(\theta,\ \varepsilon)=\int_0^\theta\zeta^*(\eta,\ \varepsilon)\ d\eta$. При решении основным является нелинейное интегральное уравнение (11) относительно $\zeta(\theta,\ \varepsilon)$. Остальные уравнения – нелинейные трансцендентные относительно искомых функций и констант. Приходится рассматривать два случая: $\nu^{(0)}\neq\nu_n$ и $\nu^{(0)}=\nu_n$. Как и в ([3]), отметим, что $\nu^{(0)}=\nu_n$ (12) является тем особым случаем, который указан в начале статьи.

В первом случае решение $\zeta(\theta,\ \varepsilon)$, $\zeta^*(\theta,\ \varepsilon)$, $x(\theta,\ \varepsilon)/\lambda$, $s(\theta,\ \varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ строится в виде рядов по целым степеням параметра ε. Во втором случае в качестве примера рассмотрено собственное значение ν_1, простое и положительное ([3]). Здесь решение получается в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$. В обоих случаях, применяя методы Ляпунова — Шмидта ([4]), доказываем, что эти ряды абсолютно и равномерно сходятся при $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ и малых значениях $|\varepsilon|<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$ и дают единственное малое относительно ε и непрерывное по θ решение задачи.

До конца рассчитаны первые три приближения решения задачи. Получено приближенное уравнение профиля волны. Анализ главного члена этого уравнения показал, что в зависимости от соотношения между коэффициентами β_1 и d_1 над гребнем линии дна может находиться как гребень, так и впадина волны на поверхности жидкости.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Я. И. Секерж-Зенькович*, XIII Международн. конгресс по теоретич. и прикл. мех., Сборн. аннот., 1972, стр. 97. [2] *Я. И. Секерж-Зенькович*, ДАН, т. 210, № 2, 302 (1973). [3] *Я. И. Секерж-Зенькович*, ДАН, т. 202, № 4, 787 (1972). [4] *М. М. Вайнберг, В. А. Треногин*, УМН, т. 17, в. 2 (104), 13 (1962).