Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

М. И. КАНОВИЧ

СЛОЖНОСТЬ ПРЕДЕЛА ШПЕКЕРОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 VI 1973)

В работе [1] Э. Шпекером была построена ограниченная возрастающая алгорифмическая последовательность рациональных чисел, не сходящаяся ни к какому конструктивному действительному числу. Такие последовательности называют шпекеровыми. В данной заметке мы покажем, что всякое конструктивное действительное число, являющееся «кандидатом в пределы» шпекеровой последовательности, имеет большую сложность и сложность такого числа тем больше, чем «удачнее» его кандидатура.

1. Пусть α — последовательность конструктивных действительных чисел, т. е. нормальный алгорифм (в подходящем алфавите), перерабатывающий всякое натуральное число в FR-число *. Результат применения алгорифма α к натуральному числу n будем обозначать α_n. Пусть ε — положительное действительное число. Конструктивное действительное число x назовем ε-пределом последовательности α, если $\neg\neg\exists n_0 \forall n$ $(n \geqslant n_0 \supset |\alpha_n - x| < \varepsilon)$.

Нетрудно видеть, что конструктивное действительное число x является пределом монотонной последовательности конструктивных действительных чисел α тогда и только тогда, когда x является ε-пределом последовательности α для любого положительного числа ε.

Конструктивное действительное число (FR-число) x определяется как слово вида $P \diamond Q$, где P — запись нормального алгорифма $\mathfrak{A}$ (в стандартном (двухбуквенном) расширении алфавита $0|-/$), являющегося фундаментальной последовательностью рациональных чисел, а Q — запись нормального алгорифма $\mathfrak{B}$ (в стандартном расширении алфавита $0|$), являющегося регулятором сходимости последовательности $\mathfrak{A}$ (см. [3], § 3). Под сложностью числа x будем понимать сумму сложностей алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, т. е.

$$x^{\natural} = \mathfrak{A}^{\natural} + \mathfrak{B}^{\natural}$$

(сложность алгорифма определяется как длина его изображения (см. [4], §§ 5, 9)).

Теорема 1. *Последовательность конструктивных действительных чисел α не сходится ни к какому конструктивному действительному числу тогда и только тогда, когда для любого числа C квазиосуществимо ** такое положительное число ε, что сложность любого ε-предела последовательности α больше C.*

2. Приведем оценки роста сложности ε-пределов шпекеровых последовательностей.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением таких последовательностей α, для которых $\forall n \quad 0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$. Будем также полагать, что допустимыми значениями переменной ε являются положительные конструктивные действительные числа, меньшие 1.

---

* Мы будем использовать понятия и терминологию работ [2, 3]. Все суждения понимаются конструктивно, прилагательное «конструктивный» будет иногда опускаться.

** Квантор «квазиосуществимо» понимается как в [4], § 4.

Теорема 2. *Осуществимо такое число C, что, какова бы ни была монотонная последовательность конструктивных действительных чисел α, ограниченная 0 и 1, для любого ε квазиосуществим ε-предел последовательности α, сложность которого не превосходит*

$$\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 5}+C$$

Приведенная в теореме 2 верхняя оценка является наилучшей по порядку. В следующей теореме говорится о том, что существует шпекерова последовательность, сложность ε-пределов которой имеет максимальный (по порядку) рост.

Теорема 3. *Осуществимы возрастающая (алгорифмическая) последовательность рациональных чисел α, ограниченная 0 и 1, и действительное число C такие, что для любого ε сложность всякого ε-предела последовательности α больше, чем*

$$\frac{\ln(1/\varepsilon)}{5\ln 5}-C$$

3. Каждому бесконечному перечислимому множеству натуральных чисел $\mathfrak{M}$ сопоставляется последовательность двоично-рациональных чисел α следующим образом:

для любого натурального числа n

$$\alpha_n={}^1/_2\sum_{m=0}^{n}2^{-f(m)},$$

где f — общерекурсивная функция, перечисляющая без повторений множество $\mathfrak{M}$.

Нетрудно видеть, что натуральное число k принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда существует такое число n_0, что для всех натуральных чисел n, больших n_0, в двоичном разложении числа α_n на $(k+1)$-м месте после запятой стоит 1.

Очевидно, что $\forall n\quad 0<\alpha_n<\alpha_{n+1}<1$.

Вопрос о существовании предела последовательности α тесно связан с алгорифмической характеристикой множества $\mathfrak{M}$ и подробно исследован в работе ([5]). В частности, нетрудно убедиться, что последовательность α шпекерова тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{M}$ не разрешимо. Оказывается, что сложность ε-пределов таких шпекеровых последовательностей существенно ниже $\ln(1/\varepsilon)$.

Последовательность α будем называть **ω-перечислимой двоичной дробью**, если существует такая разнозначная* общерекурсивная функция f, что для любого натурального числа n

$$\alpha_n={}^1/_2\sum_{m=0}2^{-f(m)}.$$

Для того чтобы сформулировать теоремы об асимптотически близких верхней и нижней оценках сложности ε-пределов ω-перечислимых двоичных дробей, нам удобно ввести две конструктивные функции η_1 и η_2, определенные на интервале $(0, 1)$:

$$\eta_1(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{14\ln\ln\ln(1/\varepsilon)}{\ln\ln(1/\varepsilon)}, & \text{если}\quad \varepsilon\leqslant 1/e^e,\\ 0, & \text{если}\quad \varepsilon>1/e^e;\end{cases}$$

* Т. е. $\forall nm\ (n\neq m\supset f(n)\neq f(m))$.

$$
\eta_2(\varepsilon)=\begin{cases} \dfrac{2\ln\ln\ln\ln(1/\varepsilon)}{\ln\ln\ln(1/\varepsilon)}, & \text{если} \quad \varepsilon\leqslant 1/e^{e^e}, \\ 0, & \text{если} \quad \varepsilon > 1/e^{e^e}. \end{cases}
$$

Теорема 4. *Осуществимо такое число C, что, какова бы ни была ω-перечислимая двоичная дробь α, для любого ε квазиосуществим ε-предел последовательности α, сложность которого не превосходит*

$$
\frac{1+\eta_1(\varepsilon)}{\ln 6}\ln\ln(1/\varepsilon)+2\alpha\,3+C.
$$

Теорема 5. *Осуществимы ω-перечислимая двоичная дробь α и действительное число C такие, что для любого ε сложность всякого ε-предела последовательности α больше, чем*

$$
\frac{1-\eta_2(\varepsilon)}{\ln 6}\ln\ln(1/\varepsilon)-C.
$$

4. Теоремы 3 и 4 показывают, что не всякую шпекерову последовательность можно получить с помощью конструкции, изложенной в п. 3.

Последовательности конструктивных действительных чисел α и β назовем эквивалентными, если

$$
\forall\varepsilon\neg\neg\exists n_0\forall n(n\geqslant n_0\supset|\alpha_n-\beta_n|<\varepsilon).
$$

Из теоремы 3 и 4 получаем следующее предложение.

Следствие 1. *Осуществима возрастающая (алгорифмическая) последовательность рациональных чисел, ограниченная* 0 *и* 1, *не эквивалентная никакой ω-перечислимой двоичной дроби.*

5. Будем говорить, что последовательность конструктивных действительных чисел α эффективно не сходится, если можно указать такую конструктивную функцию g, определенную и неограниченную сверху на интервале (0, 1), что для любого ε сложность всякого ε-предела последовательности α больше, чем $g(\varepsilon)$.

Теорема 6. *Пусть f — разнозначная общерекурсивная функция и α — последовательность рациональных чисел такая, что для любого натурального числа n*

$$
\alpha_n={}^1/_2\sum_{m=0}^{n}2^{-f(m)}.
$$

Тогда последовательность α эффективно не сходится в том и только том случае, когда множество значений функции f эффективно нерекурсивно.

Таким образом, понятие эффективной нерекурсивности * «отображается» в конструктивный анализ.

Нетрудно видеть, что если последовательность α эффективно не сходится, то для нее можно построить сильно понижающий алгорифм, т. е. алгорифм, перерабатывающий всякое конструктивное действительное число в некоторое меньшее конструктивное действительное число, при этом всякая верхняя граница последовательности α перерабатывается в верхнюю границу последовательности α (см. определение в ([5])).

Из приведенной выше теоремы 6, следствия § 4 и теоремы 1 § 5 статьи ([5]) и теоремы 4 статьи ([7]) получаем, что обратное предложение неверно.

Следствие 2. *Осуществима такая последовательность рациональных чисел α, являющаяся ω-перечислимой двоичной дробью, что*

---

* См. определение и свойства эффективно нерекурсивных множеств в ([6]).

1) *для последовательности α существует сильно понижающий алгорифм*;

2) *неверно, что последовательность α эффективно не сходится.*

Результат Э. Шпекера ([1]) был усилен И. Д. Заславским ([8]), доказавшим существование шпекеровых последовательностей, обладающих понижающими алгорифмами. Согласно следствию 2, эффективно не сходящиеся последовательности являются еще более сильными опровержениями предложения о сходимости всякой ограниченной монотонной последовательности конструктивных действительных чисел.

6. В качестве конструктивных действительных чисел мы рассматривали FR-числа и под сложностью числа x понималась суммарная длина изображений основы числа x и регулятора сходимости числа x. Аналогичные результаты имеют место и для других определений конструктивного действительного числа и его сложности.

Отметим также существенное отличие характера полученных нижних и верхних оценок от характера оценок сложности решения некоторых других массовых проблем анализа, приведенных в статье ([9]).

Автор глубоко благодарен чл.-корр. АН СССР А. А. Маркову за внимание и советы при работе над данной статьей.

Тульский политехнический
институт

Поступило
15 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Specker, J. Symb. Logic, 14, № 3, 145 (1949). [2] А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 42, (1954). [3] Н. А. Шанин, Там же, 67, 15 (1962). [4] А. А. Марков, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, 161 (1967). [5] Г. С. Цейтин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 93, 102 (1970). [6] М. И. Канович, ДАН, 194, № 3, 500 (1970). [7] М. И. Канович, ДАН, 204, № 3, 533 (1972). [8] И. Д. Заславский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 67, 385 (1962). [9] М. И. Канович, Б. А. Кушнер, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 16, 81 (1969).