Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 517.946.6

МАТЕМАТИКА

Г. Г. КАЗАРЯН

О ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ

(Представлено академиком С. М. Никольским 6 VI 1973)

Пусть R_n и E_n — n-мерные эвклидовы пространства действительных векторов (точек) $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $x=(x_1, \ldots, x_n)$, A_n — n-мерное пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где все α_i, $i=1, \ldots, n$,— целые, неотрицательные числа. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in A_n$, то положим $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}$, $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$,

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}=i^{-|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\ldots\partial\xi_n^{\alpha_n}}.$$

Обозначим еще $R_n^{(0)}=\{\xi;\ \xi\in R_n,\ \prod_{i=1}^n\xi_i\neq0\}$.

Определение 1 (см. ([1]), определение 4.1.1). Полином $P(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$, где γ_α — вообще говоря, комплексные числа, называется *гипоэллиптическим*, если для всех $\nu\in A_n$, $|\nu|\neq0$,

$$|D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)|\to0 \quad \text{при} \quad |\xi|\to\infty. \tag{1}$$

Определение 2. Полином (относительно ξ) $P(x, \xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha(x)\xi^\alpha$, где $\gamma_\alpha(x)$ — вообще говоря, комплексные функции, определенные в области $\Omega\subset E_n$, называется *гипоэллиптическим в точке* $x^0\in\Omega$, если гипоэллиптическим является полином $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами. Полином $P(x, \xi)$ называется *гипоэллиптическим* в Ω, если $P(x, \xi)$ гипоэллиптичен в каждой точке $x\in\Omega$.

Цель настоящей заметки — нахождение алгебраических условий гипоэллиптичности полинома $P(\xi)$ или $P(x, \xi)$.

Приведем некоторые необходимые определения.

Определение 3. *Характеристическим многогранником* (х. м.) *данного полинома* $P(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$ назовем минимальный выпуклый многогранник в A_n, содержащий все точки $\alpha\in A_n$, для которых $\gamma_\alpha\neq0$ в полиноме $P(\xi)$.

Определение 4. Многогранник $\mathfrak{R}$ назовем *вполне правильным* (в.п.), если: а) $\mathfrak{R}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат и б) все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней х.м. $\mathfrak{R}$ положительны.

Обозначим k-мерные, $0\leqslant k\leqslant n-1$, грани данного х.м. $\mathfrak{R}$ полинома $P(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$ через $\mathfrak{R}_i^k$, $i=1, \ldots, M_k$.

Определение 5. Грань $\mathfrak{R}_i^k$, $i=1, \ldots, M_k$, $k=0, \ldots, n-1$, х.м. $\mathfrak{R}$ полинома $P(\xi)$ назовем *P-регулярной*, если полином $P^{i,k}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_i^k}\gamma_\alpha\xi^\alpha\neq0$ при $\xi\in R_n^{(0)}$.

Грани, не являющиеся P-регулярными, будем называть P-нерегулярными.

Л. Хёрмандеру [1] принадлежит следующий результат: пусть $P^0(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha)=d} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ — обобщенно однородный (λ-однородный) полином. Если $P^0(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, то всякий полином $P(\xi) = P^0(\xi) + \sum_{(\lambda, \alpha)<d} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ гипоэллиптичен.

В работах многих авторов рассматривалась задача о нахождении алгебраических условий гипоэллиптичности. Отметим уже упомянутую книгу Л. Хёрмандера [1], а также работы С. М. Никольского [2], Бруно Пини [3], Л. Каттабрига [4], Йорана Фриберга [5], Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [6] и других. В работе [2] доказывается гипоэллиптичность полинома, через который оцениваются все входящие в него мономы. В работах [4–6] даются условия, при которых через данный полином оцениваются все входящие в него мономы, и тем самым даются достаточные условия гипоэллиптичности. Рассмотренные ими полиномы близки в некотором смысле эллиптическим.

Наиболее общий результат в этом направлении получен в [5]. В работе [3] получены условия гипоэллиптичности и в том случае, когда через данный полином оцениваются не все мономы, входящие в этот полином, т. е. изученный полином не является эллиптическим. Однако там рассматривается случай полиномов с обобщенно-однородной главной частью, причем условия гипоэллиптичности одного полинома сводятся к условию гипоэллиптичности другого полинома.

В настоящей работе даются условия, при которых не эллиптический полином $P(\xi)$ является гипоэллиптическим.

Нетрудно показать (см., например, [4–6]), что для гипоэллиптичности полинома $P(\xi)$ необходимо, чтобы х.м. точек $\{\alpha\} \cup \{0\}$ был в.п., где $\{\alpha\}$ — множество мультииндексов, для которых $\gamma_\alpha \neq 0$ в полиноме $P(\xi)$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что х.м. $\mathfrak{N}$ рассматриваемого полинома является в.п.

Определение 6. $(n-1)$-мерную грань $\mathfrak{N}_i^{n-1}$, $i=1, \ldots, M_{n-1}$, х.м. $\mathfrak{N}$ будем называть главной, если внешняя (относительно $\mathfrak{N}$) нормаль этой грани имеет хотя бы одну положительную координату; k-мерную грань, $k<n-1$, $\mathfrak{N}_i^k$, $i=1, \ldots, M_k$, $k=0, 1, \ldots, n-2$, х.м. $\mathfrak{N}$ назовем главной, если среди $(n-1)$-мерных граней, пересечением которых образуется грань $\mathfrak{N}_i^k$, существует хотя бы одна главная грань.

Обозначим через Λ_i^k множество единичных внешних нормалей грани $\mathfrak{N}_i^k$ х.м. $\mathfrak{N}$. Пусть $\lambda \in \Lambda_i^k$, тогда полином $P(\xi)$ можно представить в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{N_\lambda} P_{d_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{N_\lambda} \sum_{(\lambda, \alpha)=d_j(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{2}$$

где $d_0(\lambda) > d_1(\lambda) > \ldots > d_{N_\lambda}(\lambda)$, $P_{d_0(\lambda)}(\xi) \equiv P^{i,k}(\xi)$.

Введем еще обозначения:

$$\Sigma^{i,k} \equiv \Sigma^{i,k}_{d_0(\lambda)} = \{\eta;\ \eta \in R_n^{(0)},\ P^{i,k}(\eta) = 0\},$$

$$\Sigma^{i,k}_{d_j(\lambda)} = \{\eta;\ \eta \in \Sigma^{i,k}_{d_{j-1}(\lambda)},\ P_{d_j(\lambda)}(\eta) = 0\}, \quad j = 1, \ldots, N_\lambda$$

Пусть $\lambda \in \Lambda_i^k$, $\eta \in \Sigma^{i,k}_{d_j(\lambda)}$, положим

$$\mathfrak{A}^{i,k}_{d_j(\lambda)}(\eta) = \{\nu;\ \nu \in A_n,\ D^\nu P_{d_j(\lambda)}(\eta) \neq 0\},$$

$$\mathfrak{A}^{i,k}_{d_j(\lambda)} = \bigcup_{\eta \in \Sigma^{i,k}_{d_j(\lambda)}} \mathfrak{A}^{i,k}_{d_j(\lambda)}(\eta), \quad j = 1, \ldots, N_\lambda; \quad \mathfrak{A}^{i,k} \equiv \mathfrak{A}^{i,k}_{d_0(\lambda)}.$$

Очевидно, если грань $\mathfrak{N}_i^k$ х.м. $\mathfrak{N}$ полинома $P(\xi)$ P-регулярна, то $\Sigma^{i,\,k}=\phi$.

Основными результатами настоящей заметки являются следующие (в теоремах 1 и 2 коэффициенты γ_α предполагаются действительными).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{N}$ — в.п. х.м. полинома $P(\xi)$, $\mathfrak{N}_{i_0}^{k_0}$ — некоторая главная P-нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{N}$, причем если $\lambda\in\Lambda_{i_0}^{k_0}$, то $\Sigma_{d_{m_\lambda}}^{i_0,k_0}\neq\phi$, $\Sigma_{d_{m_\lambda+1}}^{i_0,k_0}=\phi$. Для того чтобы полином $P(\xi)$ был гипоэллиптическим, необходимо, чтобы для всех $\lambda\in\Lambda$ выполнялось условие*

$$\max_{\substack{\nu^j\in\mathfrak{A}_{d_j(\lambda)}^{i_0,\,k_0}\\ 1\leqslant j\leqslant m_\lambda}}\{d_j(\lambda)-(\lambda,\nu^j)\}<d_{m_\lambda+1}.$$

Теорема 2. *Пусть все главные грани х.м. $\mathfrak{N}$ полинома $P(\xi)$ P-регулярны, кроме одной $(n-1)$-мерной главной грани $\mathfrak{N}^{n-1}_{,}$ с внешней нормалью λ.*

Тогда полином $P(\xi)$ гипоэллиптичен при одновременном выполнении следующих условий:

а) $\max\limits_{\nu\in\mathfrak{A}^{i_0,n-1}}\{d_0(\lambda)-(\lambda,\nu)\}<d_1(\lambda)$;

б) *для каждой точки $\eta\in\Sigma^{i_0,\,n-1}$ существуют аналитические в $R_n^{(0)}$ функции $r(\eta,\xi)$ и $\mathscr{P}(\eta,\xi)$ такие, что в некоторой окрестности точки η полином $P^{i_0,\,n-1}(\xi)$ представляется в виде*

$$P^{i_0,\,n-1}(\xi)=[r(\eta,\xi)]^{k(\eta)}\cdot\mathscr{P}(\eta,\xi)\geqslant0\ \ (\leqslant0),\tag{3}$$

где $k(\eta)$ — натуральное число, $\mathscr{P}(\eta,\eta)\neq0$, $\dfrac{\partial r(\eta,\eta)}{\partial\xi_i}\neq0$, $i=1,\ldots,n$;

в) $P_{d_1(\lambda)}(\eta)>0$ (<0) $\quad\forall\eta\in\Sigma^{i_0,\,n-1}$.

Замечание 1. Необходимость условия а) следует из теоремы 1. Существенность требований неотрицательности (соответственно положительности) полиномов $P^{i_0,\,n-1}(\xi)$, $P_{d_1(\lambda)}(\eta)$ можно показать на примерах. Представление (3) необходимо в случае $n=2$.

В случае, когда для некоторой точки $\eta\in\Sigma^{i_0,\,n-1}$ также $P_{d_1(\lambda)}(\eta)=0$, т. е. когда $\Sigma_{d_1(\lambda)}^{i_0,\,n-1}\neq\phi$, достаточные условия дает

Теорема 3. *Пусть, как и в теореме 2, $\mathfrak{N}_{i_0}^{n-1}$ — единственная главная P-нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{N}$ полинома $P(\xi)$, причем $\Sigma_{d_1(\lambda)}^{i_0,n-1}\neq\phi$.*

Тогда полином $P(\xi)$ является гипоэллиптическим при одновременном выполнении следующих условий:

а) $\max\limits_{\substack{\nu^j\in\mathfrak{A}_{d_j(\lambda)}^{i_0,\,n-1}\\ j=0,\,1}}\{d_j(\lambda)-(\lambda,\nu^j)\}<d_2(\lambda)$;

б) *для каждой точки $\eta\in\Sigma_{d_1(\lambda)}^{i_0,n-1}$ существуют аналитические в $R_n^{(0)}$ функции $r(\eta,\xi)$, $\mathscr{P}(\eta,\xi)$ и $\tilde r(\eta,\xi)$, $\tilde{\mathscr{P}}(\eta,\xi)$ такие, что в некоторой окрестности η полиномы $P^{i_0,\,n-1}(\xi)$ и $P_{d_1(\lambda)}(\xi)$ представляются соответственно в виде*

$$P^{i_0,\,n-1}(\xi)=[r(\eta,\xi)]^{k(\eta)}\mathscr{P}(\eta,\xi)\geqslant0\ \ (\leqslant0),$$

$$P_{d_1(\lambda)}(\xi)=[\tilde r(\eta,\xi)]^{\tilde k(\eta)}\tilde{\mathscr{P}}(\eta,\xi)\geqslant0\ \ (\leqslant0),$$

где функции r, $\tilde r$, $\mathscr{P}$, $\tilde{\mathscr{P}}$ и числа k, $\tilde k$ удовлетворяют условиям, аналогичным условию б) теоремы 2.

Если же $\eta\in\Sigma^{i_0,\,n-1}$, *но* $\eta\notin\Sigma^{i_0,n-1}_{d_1(\lambda)}$, *то удовлетворяется условие* б) *теоремы* 2;

в) $P_{d_2(\lambda)}(\eta)>0$ (<0) *в точках* $\eta\in\Sigma^{i_0,n-1}_{d_1(\lambda)}$.

Замечание 2. Если $\Sigma^{i_0,n-1}_{d_2(\lambda)}\neq\varnothing$, то можно сформулировать теорему, дающую достаточные условия гипоэллиптичности, поставив соответственные условия на полиномы $P_{d_2(\lambda)}(\xi)$, аналогичные условию б) теоремы 2 и условия на $P_{d_3(\lambda)}(\xi)$, аналогичные условию в) теоремы 2 и т. д.

Пусть $\mathfrak{R}(x)$ — х.м. полинома $P(x,\ \xi)$, имеющий в точке $x^0\in\Omega$ главную $(n-1)$-мерную $P(x^0,\ \xi)$-нерегулярную грань $\mathfrak{R}^{n-1}_{i_0}$.

Положим

$$K(x,\ \xi)=\overline{P^{i_0,\,n-1}(\xi)}\cdot\sigma^{i_0,\,n-1}(x,\ \xi)+P^{i_0,\,n-1}(x,\ \xi)\cdot\overline{\sigma^{i_0,\,n-1}(x,\ \xi)},$$

где $\sigma^{i_0,\,n-1}(x,\ \xi)=\sum\limits_{\alpha}\gamma_\alpha(x)\xi^\alpha;\quad 2d_1(\lambda)-d_0(\lambda)\leqslant(\lambda,\ \alpha)<d_0(\lambda)$, $\overline{R}$ — комплексно-сопряженное к R.

Замечание 3. Признак гипоэллиптичности полинома $P(x,\ \xi)$ в Ω можно получить, если ставить условия а—в) теорема 2 для всех точек $x\in\Omega$. Другой признак гипоэллиптичности в Ω можно получить, если исходить из теоремы 4.1.6 работы ([1]), из теоремы 2 настоящей работы и из теоремы 3.1 работы ([7]).

Замечание 4. Если х.м. рассматриваемого полинома имеет более одной главной $(n-1)$-мерной P-нерегулярной грани, то можно получить достаточные условия гипоэллиптичности, поставив соответственные условия теорем 2, 3 для каждой такой грани. Отметим, однако, что здесь нами не рассмотрен случай, когда х.м. $\mathfrak{R}$ имеет главную k-мерную P-нерегулярную грань при $k<n-1$.

Ереванский государственный
университет

Поступило
21 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [2] С. М. Никольский, ДАН, 146, № 4, 767 (1962). [3] B. Pini, Boll. Unione mat. ital., (3), 18, 420 (1963). [4] L. Cattabriga, Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 36, 285 (1966). [5] Jöran Friberg, Annali della scuola Norm. Sup. di Pisa, Ser. III, 21, 239 (1967). [6] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, Матем. сборн., 75 (117), № 3, 400 (1968). [7] Г. Г. Казарян, ДАН, 208, № 6, 1272 (1973).