Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 512.87/89+330.115

МАТЕМАТИКА

Л. А. ИСТОМИН

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 8 VI 1973)

Представляет интерес [1] рассмотрение задач (названных обратными задачами математического программирования) вида

$$\min g(y) \quad \text{при} \quad y \in Y, \quad \max_x \{f_0(x, y): f_j(x, y) \leqslant 0 \ (j=1, 2, \ldots, m)\} \in \mathscr{D}; \quad (1)$$

здесь $x \in R^n$, $y \in R^s$, $g(y) \in \{R^s \to R\}$, $f_j(x, y) \in \{R^n \times R^s \to R\}$, $j=0, 1, \ldots, m$, $\mathscr{D} \subset R$ — поле действительных чисел *.

Частным случаем задачи (1) является задача

$$\min (\bar{u}, y) \quad \text{при} \quad y \in Y = \{y: Cy \leqslant d\}, \quad \max \{(c, x): Ax \leqslant b + By\} \in \mathscr{D}, \quad (2)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — символ скалярного произведения, $R^s \ni \bar{u}$ — фиксированный вектор, C, A, B — матрицы соответствующих размеров. Множество $\mathscr{D}$ естественно взять одним из $\mathscr{D}_1 = [\alpha, \beta]$, $\mathscr{D}_2 = (-\infty, \beta]$, $\mathscr{D}_3 = [\alpha, +\infty)$ и $\mathscr{D}_4 = (-\infty, +\infty)$. Для случаев, когда $\mathscr{D} = \mathscr{D}_3$ или $\mathscr{D} = \mathscr{D}_4$, анализ задачи (2) может быть проведен без особого труда. Если $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1$, то решение задачи (2) сводится к последовательному решению задач

$$\min_{\substack{y \in Y \\ (\bar{u}, y) \leqslant t_k}} \max \{(c, x): Ax \leqslant b + By, \ (c, x) \geqslant \alpha\} \quad (3)$$

при некоторой управляемой числовой последовательности $\{t_k\}$.

Если же $\mathscr{D} = \mathscr{D}_2$, то в (3) ограничение $(c, x) \geqslant \alpha$ опускается.

Канонической формой задачи (3) можно считать следующую:

$$\inf_{y \in Y} \max_x \{(c, x) + (h, y): Ax \leqslant b + By\} \quad (=\tilde{v}), \quad (4)$$

где $Y = \{y: Cy \leqslant d\}$.

Отметим, что задача (4) носит многоэкстремальный характер, а именно: если функция $\varphi(y) \overset{\text{опр}}{=} \max \{(c, x) + (h, y): Ax \leqslant b + By\}$, являющаяся вогнутой по y, имеет y_0 в качестве локального минимума на Y, то вектор y_0 не обязан, вообще говоря, давать глобальный минимум задачи

$$\min \{\varphi(y): y \in Y\}.$$

Это обстоятельство как раз и затрудняет ее решение.

Ниже дается анализ задачи (4) и предлагается конечный метод ее решения, основывающийся на использовании сверток Черникова [2].

1. Положим $M_y = \{x: Ax \leqslant b + By\}$, $Y_0 = \{y \in Y: M_y \neq \varnothing\}$. В дальнейшем будем предполагать $Y_0 \neq \varnothing$. При анализе задачи (4) могут возникнуть следующие ситуации:

а) Для некоторого $\bar{y} \in Y_0$ $\varphi(\bar{y}) = +\infty$. Это влечет несовместность системы линейных ограничений $A^T u = c$, $u \geqslant 0$ в задаче, двойственной к

$$\max \{(c, x) + (h, y): Ax \leqslant b + By\} \quad \text{при} \quad y = \bar{y}.$$

---

* В работе [1] рассмотрен ряд конкретных содержательных постановок, моделируемых задачами вида (1).

Но поскольку эти ограничения не связаны с y, то $\varphi(y)=+\infty$ для всех $y\in Y_0$, т. е. в этом случае $\tilde{v}=+\infty$.

б) Для любого $y\in Y_0$ $\varphi(y)<+\infty$ и в Y_0 существует последовательность $\{y_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(y_n)=-\infty$. Это влечет $\tilde{v}=-\infty$. Нетрудно показать, что в этом случае множество Y_0, являясь выпуклым, будет содержать конус

$$K=\{y_0+z\in R^s:\ y+\lambda z\in Y_0\quad \forall y\in Y_0,\ \forall\lambda\geqslant 0\}$$

с вершиной $y_0\in Y_0$, выбранной из Y_0 произвольным образом, и движение по некоторому лучу из этого конуса реализует стремление $\varphi(y)$ к $-\infty$.

в) Пусть при некотором α: $\alpha\leqslant\varphi(y)<+\infty$ $\forall y\in Y_0$. Можно показать, что $\inf\{\varphi(y):\ y\in Y_0\}$ достигается и, следовательно, в (4) операцию inf можно заменить на min. При предположениях этого пункта задачу (4) будем называть р а з р е ш и м о й.

Условие $\{u:\ A^Tu=c,\ u\geqslant 0\}\neq\varnothing$ является, очевидно, необходимым, а ограниченность Y_0 — достаточным для разрешимости задачи (4). Множество Y_0 будет ограниченным, в частности, при ограниченности многогранника решений системы $Cy\leqslant d$. Отметим, что для ограниченности выпуклых полиэдральных множеств существуют и необходимые и достаточные признаки, носящие конструктивный характер [2].

2. Рассмотрим следующие две системы линейных неравенств над $R^n\times R^s$, поставленные в соответствие задаче (4):

$$Ax-By\leqslant b,\quad Cy\leqslant d, \tag{5}$$

$$Ax-By\leqslant b,\quad Cy\leqslant d,\quad (c,\ x)+(h,\ y)\geqslant\gamma; \tag{6}$$

здесь γ рассматривается как скалярный параметр.

Запишем R^n-свертки Черникова для систем (5) и (6):

$$Qy\leqslant q, \tag{5$'$}$$

$$Sy\leqslant s+\gamma p, \tag{6$'$}$$

где вектор p автоматически получается неположительным.

Отметим, что R^n-свертка, например, системы (5) реализует проектирование многогранника решений системы (5) на подпространство R^s пространства $R^n\times R^s$ и носит конструктивный характер.

Многогранник решений системы (5′) совпадает с Y_0 $(=\{y:\ Cy\leqslant d,\ \{x:\ Ax\leqslant b+By\}\neq\varnothing\})$, поэтому в силу предположения $Y_0\neq\varnothing$ система (5′) совместна. Обозначим через Γ область значений параметра γ, для которых система неравенств (6′) является следствием системы (5′). Определение области Γ сводится, как легко видеть, к решению конечного, не превосходящего числа неравенств в системе (6′), числа задач линейного программирования и носит, следовательно, также конструктивный характер.

В силу $p\leqslant 0$ область Γ может быть одного из следующих видов: $\Gamma_1=(-\infty,+\infty)$, $\Gamma_2=\varnothing$, $\Gamma_3=(-\infty,\bar{\gamma}]$.

Рассмотренные в п. 1 случаи характеризует следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть* $Y_0=\varnothing$. *Тогда*

а) *если* $\Gamma=\Gamma_1$, *то* $\tilde{v}=+\infty$,

б) *если* $\Gamma=\Gamma_2$, *то* $\tilde{v}=-\infty$,

в) *если* $\Gamma=\Gamma_3$, *то* $\tilde{v}=\bar{\gamma}$.

Теоремой 1, а также предшествующими ей рассуждениями, определяется и процедура (конечная) нахождения $\tilde{v}$.

Выделим теперь те неравенства из системы (6′) при $\gamma=\bar{\gamma}$

$$(S_i,\ y)\leqslant s_i+\bar{\gamma}p_i,\quad i\in I,$$

для которых

$$[\{y:\ Qy\leqslant q\}\cap\{y:\ (S_i,\ y)=s_i+\bar{\gamma}p_i\}]=Y_i\neq\varnothing.$$

Положим

$$\tilde{M}_y=\{x\in M_y:\ (c,\ x)+(h,\ y)=\varphi(y)\},$$
$$Z_i=\{(x;\ y)\in R^n\times R^s:\ y\in Y_i,\ x\in\tilde{M}_y\},$$

$\tilde{Z}$ — множество пар $(x;\ y)$, решающих задачу (4), т. е.

$$\tilde{Z}=\{(x;\ y)\in R^n\times R^s:\ y\in Y_0,\quad x\in\tilde{M}_y,\quad \varphi(y)=\tilde{v}\}.$$

Теорема 2. *Если задача* (4) *разрешима, то* $\tilde{Z}=\bigcup\limits_{i\in I}Z_i$.

3. Используя принцип двойственности в линейном программировании, задаче (4) можно придать другой вид. Под L_y будем понимать символическую запись задачи

$$\max_x\{(c,\ x)+(h,\ y):\ Ax\leqslant b+By\}.$$

Тогда двойственной L_y^* к ней будет задача

$$\min_u\{(u,\ b+By)+(h,\ y):\ A^Tu=c,\ u\geqslant 0\}.$$

Теорема двойственности для задач линейного программирования позволяет утверждать, что при условии разрешимости задачи (4) имеет место равенство

$$\tilde{v}=\min\{(u,\ b)+(u,\ By)+(h,\ y):\ Ax\leqslant b+By,\ A^Tu=c,\ u\geqslant 0,\ Cy\geqslant d\}.\qquad(7)$$

Задача (7) является частным случаем следующей многоэкстремальной задачи канонического вида:

$$\min\{(c_1,\ x)+(x,\ Hy)+(h_1,\ y):\ C_1x\leqslant d_1,\ C_2y\leqslant d_2\}.\qquad(8)$$

От задачи (8) путем обратного перехода можно прийти к задаче вида (4). Следовательно, задачу (8) можно решить по изложенной выше процедуре.

Отметим, что к задаче вида (8) может быть сведена, например, задача

$$\min\{x^TCx+(c,\ x):\ Ax\leqslant b\},\qquad(9)$$

в которой матрица C симметрическая, отрицательно определенная (следовательно, задача (9) также многоэкстремальная). Действительно, пусть x_0 — решение системы $2Cx+c=0$. Заменой $y=x-x_0$ приходим к эквивалентной задаче

$$\min\{y^TCy+\alpha:\ Ay\leqslant\bar{b}\},$$

где $\alpha=x_0{}^TCx_0+(c,\ x_0)$, $\bar{b}=b-Ax_0$. Последняя же эквивалентна задаче

$$\min\{(y,\ Cz):\ Ay\leqslant\bar{b},\ Az\leqslant\bar{b}\},$$

т. е. эквивалентна задаче вида (8).

Институт математики и механики
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
3 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Истомин, Сборн. Математ. методы в некотор. задачах опт. планирования, Свердловск, 1971. [2] С. Н. Черников, Линейные неравенства, «Наука», 1968.