Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 517.941 *МАТЕМАТИКА*

И. И. ГОЛИЧЕВ

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 V 1973)

В работе рассматриваются дифференциальные уравнения

$$(a_tL+b_t)u(t)=f(t), \tag{1}$$

$$(a_tL+b_t)u(t)=0 \tag{2}$$

в банаховом или гильбертовом пространстве E, где L — линейный замкнутый оператор в E, a_t и b_t — дифференциальные выражения по t, $t\in[0,T]$, $T\leqslant+\infty$, коэффициенты которых удовлетворяют обычным условиям гладкости, $u(t)$ и $f(t)$ — вектор-функции со значениями в банаховом пространстве E.

Пусть m — максимальный порядок дифференциальных выражений a_t и b_t и пусть задана числовая матрица $H=(\alpha_{k,j})_{k,j=1}^{m}$ ранга τ, $\tau\leqslant m$. Через $\bar u(t)$ будем обозначать столбец, состоящий из вектор-функций $u(t)$, $du(t)/dt,\ldots,d^{m-1}u(t)/dt^{m-1}$, и через $\bar h$ — столбец, состоящий из элементов $h_1,h_2,\ldots,h_\tau$ пространства E.

Будем искать решение уравнения (1), (2) при условии

$$H\bar u(t)\big|_{t=0}=\bar h \tag{3}$$

или при ослабленном условии

$$\lim_{t\to0}H\bar u(t)=\bar h. \tag{3'}$$

В статье изучаются вопросы разрешимости, непрерывной зависимости от начальных условий и асимптотические оценки (по t) решения задачи (2), (3) (т. е. решения уравнения (2) при условии (3) или (3')).

1. Пусть L — ограниченный оператор в E. Тогда, как нетрудно видеть, найдется контур C такой, что все особенности резольвенты $R(\lambda)=(L-\lambda I)^{-1}$ оператора L лежат внутри области, ограниченной контуром C, и резольвента определена во всем пространстве E, когда $\lambda\in C$.

Пусть существует решение $\omega(\lambda,t)$ уравнения

$$(\lambda a_t+b_t)\omega(\lambda,t)=0 \tag{4}$$

при условии (3) и при этом $\omega(\lambda,t)$, как функция от λ, аналитична в области, содержащей контур C. Заметим, что указанное решение $\omega(\lambda,t)$ существует, если существуют скалярные функции $\psi_k(\lambda,t)$, аналитичные по λ в области, охватывающей контур C, удовлетворяющие уравнению (4) и условиям $H\bar\psi_k(\lambda,t)=\delta_k$; здесь δ_k — столбец τ чисел, где на k-м месте стоит 1, а на остальных 0.

Тогда

$$\omega(\lambda,t)=\sum_{1}^{\tau}\psi_k(\lambda,t)h_k.$$

Легко проверить, что

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1} \int_C \psi_k(\lambda, t) R(\lambda) h_k \, d\lambda \tag{5}$$

является решением задачи (2), (3).

Решение задачи (1), (3) можно искать как сумму решения задачи (2), (3) и решения уравнения (1) при условии

$$Hu(t)\,|_{t=0} = 0. \tag{3^0}$$

Пусть $\tilde{P}_0^{-1}(\lambda) f$ (смысл обозначения выяснится ниже) есть решение уравнения $(\lambda a_t + b_t)\varphi(t) = f(t)$ при условии (3^0), аналитическое по λ в области, охватывающей контур C.

Тогда решение задачи (1), (3^0) задается интегралом

$$\int_C R(\lambda) \tilde{P}_0^{-1}(\lambda) f(t) \, d\lambda,$$

поэтому

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int \psi_k(\lambda, t) R(\lambda) h_k \, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_C R(\lambda) \tilde{P}_0^{-1}(\lambda) f(t) \, d\lambda \tag{6}$$

есть решение задачи (1), (3).

Если $\tau < m$, то решения (5), (6) задач (2), (3) и (1), (3) не являются единственными. Для выделения единственного решения нужно накладывать условия на другом конце $t = T$. Если $T = +\infty$, то такими условиями может быть условие принадлежности $u(t)$ некоторому пространству $\tilde{E}_t$ вектор-функций (например, условие принадлежности $u(t)$ пространству суммируемых с квадратом нормы на $[0, \infty)$ вектор-функций).

Пусть E_t — соответствующее $\tilde{E}_t$ пространство скалярных функций $\varphi(t)$, $t \in [0, \infty)$. Обозначим через $P_0(\lambda)$ оператор в E_t, порожденный дифференциальным выражением $\lambda a_t + b_t$ на m раз дифференцируемых функциях, удовлетворяющих условию (3^0), а через $\tilde{P}_0(\lambda)$ — соответствующий оператор в $\tilde{E}_t$.

Теорема 1. *Пусть L — ограниченный оператор и при всех λ, принадлежащих некоторой области, охватывающей контур C, существует ограниченный оператор $P_0^{-1}(\lambda)$, обратный к $P_0(\lambda)$.*

Тогда существуют и притом единственные классические (*т. е. m раз дифференцируемые в обычном смысле*) *решения задач* (2), (3); (1), (3), *которые задаются формулами* (5), (6). *Решения непрерывно зависят от начальных условий* (3) *и правой части $f(t)$ уравнения* (1).

2. Рассмотрим случай неограниченного оператора L. Пусть C — непрерывная спрямляемая кривая, лежащая в некоторой полуплоскости, и длина части C, лежащей в круге $[\lambda\colon\ |\lambda| \leqslant t]$ есть величина порядка t. Обозначим через S_+ часть плоскости, лежащую по одну сторону от C, а через S_- — по другую.

Теорема 2. *Пусть в $\bar{S}_-$ существует резольвента $R(\lambda)$ оператора L, определенная во всем пространстве E, и $\|R(\lambda)\| \leqslant M(1+|\lambda|)^\alpha$ при некотором $\alpha \geqslant -1$, $M > 0$.*

Пусть функции $\psi_k(\lambda, t)$ удовлетворяют условиям:

1) *для $\psi_k(\lambda, t)$ найдется такое целое число $l_k \geqslant 0$, что*

$$\int_C \frac{d^\mu \psi_k}{dt^\mu} \Big/ (|\lambda|^{l_k - (\alpha+1)} + 1) \, d\lambda < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, \tau, \quad \mu = 0, 1, \ldots, m;$$

2) *найдется последовательность дуг K_n, лежащих в S_+ и таких, что всякая точка $\lambda \in S_+$ содержится внутри контура, составленного из конечной*

части C и дуги K_n; при $p=1, 2, \ldots, l_k-1$ и некотором $\lambda_0 \in S_-$

$$\int\limits_{K_n} \psi(\lambda, t)/(\lambda-\lambda_0)^p d\lambda \to 0 \qquad \text{при } n\to\infty.$$

Тогда уравнение (2) *разрешимо при $h_k \in D(L^{l_k})$, $k=1, 2, \ldots, \tau$, и решение представляется в виде*

$$u(t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\tau}\int\limits_C \psi_k R(\lambda) h_k\, d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\tau}\int \frac{\psi_k(\lambda, t)}{(\lambda-\lambda_0)^{l_k}} R(\lambda)\,(L-\lambda_0 I)^{l_k} h_k\, d\lambda. \tag{7}$$

Если целое $\nu>\alpha+1$, то при $h_k\in D(L^\nu)$, $k=1, 2, \ldots, \tau$, решение (7) *удовлетворяет условиям* (3).

Исследование вопроса о непрерывной зависимости от начальных условий решения задачи (2), (3) основывается на следующей абстрактной теореме.

Теорема 3. *Пусть оператор L задан в гильбертовом пространстве E; $\operatorname{Re}(Lu, u)\geqslant\omega(u, u)$ для любого $u\in D(L)$ и всякая точка полуплоскости $[\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda<\omega]$ является точкой регулярности оператора L.*

Пусть, далее, функция $\psi(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

1) *функция $\psi(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\Pi_\varepsilon=[\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda\geqslant\omega-\varepsilon]$ при некотором $\varepsilon>0$ и $|\psi(\lambda)|\leqslant M_\varepsilon$ в Π_ε;*

2) *пусть $C=\Gamma=(\lambda\colon\ m\lambda=\omega-\varepsilon_1]$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon$ и $\int\limits_{K_n}(\psi(\lambda)/\lambda)\,d\lambda\to 0$ при $n\to\infty$, где K_n — последовательность дуг, введенная в условии* 2) *теоремы* 2.

Тогда для любого $x\in D(L^3)$

$$\left\|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \psi(\lambda)R(\lambda)x\,d\lambda\right\|\leqslant M_\varepsilon\|x\|.$$

Замечание. В справочнике по функциональному анализу ([1]) (см. гл. III, § 3) ставится вопрос о том, когда мнимая степень $A^{i\beta}$ оператора A ($A^{i\beta}$ понимается как сильный предел операторов $A^{-\alpha+i\beta}$ при $\alpha\to 0$) является ограниченным оператором.

Из теоремы 3 можно получить следующее

Утверждение. *Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве E, квадратичная форма оператора лежит в полуплоскости $\Pi\in O$ и дополнение $C\Pi$ лежит в резольвентном множестве оператора A; тогда*

$$\|A^{i\beta}\|\leqslant\sup_{\lambda\in\Pi}|\lambda^{i\beta}|.$$

Используя теоремы 2 и 3, можно легко доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть L — линейный оператор в гильбертовом пространстве E, спектр которого лежит в области, ограниченной контуром C, и при $t\in(0,\infty)$ сходятся интегралы ($k=1, 2, \ldots, \tau$)*

$$\int\limits_C|\psi_k(\lambda, t)|\,\|R(\lambda)\|\,d\lambda,\qquad \int\limits_C|\lambda|\,|a_t\psi_k(\lambda, t)|\,\|R(\lambda)\|\,d\lambda,\qquad \int\limits_C|b_t\psi_k(\lambda, t)|\,\|R(\lambda)\|\,d\lambda.$$

Пусть, далее, функции $\psi_k(\lambda, t)$ аналитичны в полуплоскости Π_C, содержащей контур C, причем $|\psi_k(\lambda, t)|\leqslant\varphi_k(t)$ для всех $\lambda\in\Pi_C$, $t\in[0,\infty)$ и при каждом фиксированном $t\neq 0$ функция $\psi(\lambda, t)$ удовлетворяет условию 2) *теоремы* 3.

Тогда существует классическое решение $u(t) \in E$ уравнения (2) при ослабленном условии (3′) при любых $h_k \in E$, $k=1, 2, \ldots, \tau$, задаваемое формулой (5), и $\|u(t)\| \leqslant \sum_{k=1}^{\tau} \varphi_k(t) \|h_k\|$. Если $\varphi_k(t) \in E_t$, то $u(t) \in \tilde{E}_t$.

Замечание. Если C есть прямая, то, вообще говоря, интегралы в теореме 4 расходятся. В этом случае потребуем, чтобы $h_k \in D(L^{l_k})$. Здесь $l_k > \max[m_a+2, m_b+1] + \alpha_k$, где α_k выбрано из условия $\|\psi_k(\lambda, t)\| \leqslant M|\lambda|^{\alpha_k}$, $\lambda \in C$, $k=1, 2, \ldots, \tau$.

Решение задач (1), (3), как и в случае ограниченного оператора, можно искать в виде суммы решений задач (2), (3) и (1), (3^0), причем задачи (1), (3); (2), (3) и (1), (3^0) будут иметь единственное решение тогда и только тогда, когда задача (2), (3^0) имеет только тривиальное решение (по поводу решения задачи (1), (3^0) см., например, ([2])).

Отдел физики и математики
Башкирского филиала Академии наук СССР
Уфа

Поступило
22 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Функциональный анализ, Справочник, «Наука», 1972. [2] Ю. М. Дубинский, Матем. сборн. 90 (132), 1 (1973).