Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 517.537 **МАТЕМАТИКА**

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. НАГНИБИДА

КРАТНО ПОЛНАЯ СИСТЕМА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Понятие кратной полноты системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов впервые введено М. В. Келдышем [1,2], которым впоследствии посвящены многочисленные работы. Однако, насколько нам известно, до сих пор не была построена ни одна конкретная система, которая бы обладала свойством кратной полноты.

В этой заметке дается понятие многократной полноты системы функций * в пространстве A_R всех однозначных и аналитических в круге $|z|<R$, $0<R<\infty$, функций с топологией компактной сходимости. Далее рассматривается вопрос ** о такой полноте для систем функций вида $\{f(\alpha_k z)\}$.

1. Обозначим через $A_R^{(n)}$ произведение n экземпляров пространства A_R и введем в нем метрику соотношением

$$\rho[\hat{f}, \hat{g}]=\rho[(f_1,\ldots,f_n);(g_1,\ldots,g_n)]=\sum_{i=1}^{n}\rho(f_i,g_i),$$

где $\rho(f_i, g_i)$ — общепринятое [5] расстояние в A_R.

Очевидно, пространство $A_R^{(n)}$ становится метризуемым и полным, т. е. пространством Фреше, а каждый линейный непрерывный в нем функционал L полностью характеризуется набором из таких же функционалов L_i, $i=1,\ldots,n$, в A_R, причем

$$L(\hat{f})=L(f_1,\ldots,f_n)=\sum_{i=1}^{n}L_i(f_i).$$

Определение 1. Систему функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ назовем *слабо n-кратно полной* в A_R, если существуют такие системы $\{\psi_{k,\nu}(z)\}_{k=0}^{\infty}$, $\nu=1,\ldots,n-1$, что $\{\varphi_k(z), \psi_{k,1}(z),\ldots,\psi_{k,n-1}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ является полной в $A_R^{(n)}$, т. е. что любые n функций $g_1(z),\ldots,g_n(z)$ из A_R могут быть представлены в виде

$$g_1(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}a_k^{(N)}\varphi_k(z),\quad g_{\nu+1}(z)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}a_k^{(N)}\psi_{k,\nu}^{(z)},\quad \nu=1,\ldots,n-1,$$

коэффициенты $a_k^{(N)}$ не зависят от ν.

Все же наиболее естественным (см. п.п. 3 и 4) нам представляется

Определение 2. Будем называть систему $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ *n-кратно полной* в A_R, если в качестве $\psi_{k,\nu}(z)$, $\nu=1,\ldots,n-1$, можно взять функции $C_{k,\nu}\varphi_k(z)$, где $C_{k,\nu}$ — некоторые комплексные числа.

---

* Подобное определение введено Дж. Э. Аллахвердиевым [3] для гильбертова пространства.

** Аналогичный вопрос в пространстве $L_2(0,a)$ рассматривался ранее М. Г. Гасымовым [4] в случае, когда $f(z)$ – определенная целая функция экспоненциального типа, а $\{\alpha_k\}$ – все нули другой такой же заданной целой функции.

Поскольку, как указывалось выше, $A_R^{(n)}$ является пространством Фреше, то имеет место следующий ([6])

Критерий полноты (С. Банах). Система $\{\varphi_k(z), \psi_{k,1}^{(z)}, \ldots$ $\ldots, \psi_{k,n-1}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ *является полной в* $A_R^{(n)}$ *тогда и только тогда, когда из соотношений*

$$L_1(\varphi_k)+\sum_{i=1}^{n-1}L_{i+1}(\psi_{k,i})=0, \quad k=0,1,\ldots,$$

где L_i, $i=1, 2, \ldots, n$,*— линейные непрерывные функционалы в* A_R, *следует* $L_i=0$, $i=1, \ldots, n$.

Замечание 1. Можно было бы поставить вопрос о кратной (в смысле М. В. Келдыша) полноте в A_R системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ собственных функций некоторого оператора A, т. е. положить $C_{k,\nu}=\lambda_k^{\nu}$, где λ_k — соответствующие собственные числа. Однако, если оператор A непрерывен, такая система ни при каких дополнительных условиях не может быть даже двухкратно полной в A_R, так как в противном случае для любых $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ из A_R должно бы выполняться соотношение $\beta(z)=A\alpha(z)$, что невозможно.

Этим замечанием оправдывается, на наш взгляд, введение определений 1 и 2.

2. Пусть функция $f(z)\in A_R$, а $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность отличных от нуля комплексных чисел, причем $|\alpha_k|\leqslant 1$. В этом пункте мы находим условия на $f(z)$ и $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$, при которых система $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ является n-кратно полной * в пространстве A_R.

В связи с этим отметим, что при $C_{k,\nu}=\alpha_k^{\nu}$ (см. определение 2 и для сравнения ([4])) система $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ не является в A_R даже двухкратно полной. Действительно, с этой целью достаточно определить линейные непрерывные в A_R функционалы L_1 и L_2 соответственно ([5]) последовательностями $\{\gamma_s^{(1)}\}_{s=0}^{\infty}$ и $\{\gamma_s^{(2)}\}_{s=0}^{\infty}$, для которых

$$\gamma_0^{(1)}=0, \quad \gamma_{s+1}^{(1)}=\frac{f^{(s)}(0)}{s!\,(s+1)^s}, \quad s\geqslant 0,$$

$$\gamma_s^{(2)}=-\frac{f^{(s+1)}(0)}{(s+1)!\,(s+1)^s}, \quad s\geqslant 0.$$

Чтобы убедиться в справедливости соотношений

$$L_1(f(\alpha_k z))+L_2(\alpha_k f(\alpha_k z))=0, \quad k=0,\ 1,\ldots,$$

остается лишь воспользоваться критерием полноты С. Банаха.

Поэтому (см., например, ([7])), последовательность $\mathscr{L}_k^{(\alpha)}(z)$, $\alpha>-1$, многочленов Лагерра (т. е. собственных функций оператора $zD^2+(\alpha+1-z)D$, где $D=d/dz$), соответствующих собственным значениям $\{-k\}_{k=0}^{\infty}$, не является кратно полной в A_R смысле М. В. Келдыша (см. также замечание 1).

Теорема 1. *Если* $f(z)\in A_R$, *а* $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ *— последовательность отличных от нуля комплексных чисел, причем* $|\alpha_k|\leqslant 1$ *и* $\alpha_k\to 0$, *то система* $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ *является n-кратно полной в* A_R *лишь в том и только том случае, когда все тейлоровские коэффициенты функции* $f(z)$ *отличны от нуля.*

---

* Многие операторы в A_R (в частности, некоторые дифференциальные) эквивалентны соответствующим простейшим операторам, собственные функции которых как раз имеют вид $f(\alpha_k z)$.

Доказательство. Необходимость этого утверждения очевидна (см. ([8])), так как система $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ должна быть полной в A_R в обычном понимании. Для того чтобы убедиться и в его достаточности, положим, например,

$$C_{k,\nu}=\exp\{-\nu/|\alpha_k|\}, \quad \nu=1,\ldots,n-1; \quad k=0,1,\ldots$$

и воспользуемся критерием С. Банаха n-кратной полноты.

Пусть L_ν, $\nu=1,\ldots,n$,— линейные непрерывные функционалы в A_R, причем

$$L_1(f(\alpha_k z))+\sum_{\nu=2}^{n} L_\nu(C_{k,\nu-1}f(\alpha_k z))=0, \quad k=0,1,\ldots \tag{1}$$

Так как каждый линейный непрерывный в A_R функционал L_ν полностью определяется ([5]) некоторой последовательностью $\gamma_s^{(\nu)}$, $s=0, 1,\ldots$, для которой $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}|\gamma_s^{(\nu)}|^{1/s}<R$, то соотношения (1) могут быть, очевидно, записаны в виде

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{f^{(s)}(0)}{s!}\gamma_s^{(1)}\alpha_k^{(s)}+\sum_{\nu=2}^{n}C_{k,\nu-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{f^{(s)}(0)}{s!}\gamma_s^{(\nu)}\alpha_k^{s}=0, \quad k=0,1,\ldots,$$

или же

$$f_1(\alpha_k)+\sum_{\nu=2}^{n}C_{k,\nu-1}f_\nu(\alpha_k)=0, \quad k=0,1,\ldots, \tag{2}$$

где $f_\nu(\xi)$ — очевидным образом построенные функции из некоторого пространства A_r, $r>1$, так как

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\left[\frac{1}{s!}|f^{(s)}(0)|\,|\gamma_s^{(\nu)}|\right]^{1/s}<1.$$

Перейдем к пределу при $k\to\infty$. Тогда, очевидно, $f_1(0)=0$ и, тем самым, $\gamma_0^{(1)}=0$. Разделив, далее, соотношения (2) на α_k, снова переходим к пределу при $k\to\infty$. Таким образом, мы убеждаемся в том, что и $\gamma_1^{(1)}=0$. Продолжая этот процесс дальше, уже легко заключить, что $\gamma_s^{(1)}=0$ $(s\geqslant 0)$ и поэтому $L_1=0$.

Теперь соотношения (2) можно записать в виде

$$f_2(\alpha_k)+\sum_{\nu=3}C_{k,\nu-2}f_\nu(\alpha_k)=0, \quad k=0,1,\ldots \tag{3}$$

Повторяя по отношению к (3) те же рассуждения, что и для (2), последовательно получим тождества $L_2=L_3=\ldots=L_{n-1}=0$ и придем, наконец, к соотношениям

$$f_n(\alpha_k)=0, \quad k=0,1,\ldots \tag{4}$$

Из (4) следует, что и $L_n=0$, так как последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ является множеством единственности для функции $f_n(\xi)$. Теорема доказана.

3. Следующее утверждение убеждает нас в том, что второе определение кратной полноты действительно более приемлемо, чем определение 1.

Теорема 2. *Каждая полная (в обычном смысле) в A_R система вида $\{\psi(\beta_k z)\}_{k=0}^{\infty}$, где $\psi(\xi)=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\psi_s\xi^s$ — целая функция, является в нем также слабо n-кратно полной.*

Для доказательства этого утверждения рассмотрим систему

$$\left\{ f(\alpha_k z), e^{-1/|\alpha_k|} f(\alpha_k z), \ldots, e^{-(n-2)/|\alpha_k|} f(\alpha_k z), \frac{e^{-(n-1)/|\alpha_k|}}{\psi_+(|\beta_k|R)} \psi(\beta_k z) \right\}_{k=0}^{\infty},$$

где функция $f(z)$ и последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а $\psi_+(\xi)=\sum_{s=0}^{\infty}|\psi_s|\xi^s$. Теперь, чтобы убедиться в ее полноте в $A_R^{(n)}$ (это равносильно слабо n-кратной полноте в A_R системы $\{\psi(\beta_k z)\}_{k=0}^{\infty}$), остается лишь снова повторить те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1.

4. Наконец (см. начало п. 3), покажем еще, что справедлива

Теорема 3. *Система $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ не является n-кратно полной в A_R. В то же время она слабо n-кратно полна.*

Доказательство проведем (для простоты) при $n=2$. Зафиксируем произвольную последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ и выберем числа $\gamma_k^{(2)}$, $\gamma_k^{(2)}\neq 0$, так, чтобы одновременно выполнялись равенства

$$\lim\,(|\gamma_k^{(2)}|)^{1/k}=0, \quad \lim\,(|c_k|\,|\gamma_k^{(2)}|)^{1/k}=0.$$

Полагая теперь $\gamma_k^{(1)}=-c_k\gamma_k^{(2)}$, $k=0, 1, \ldots$, и рассматривая порожденные последовательностями $\{\gamma_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\gamma_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$ линейные непрерывные в (любом) пространстве A_R, $0<R<\infty$, функционалы L_1 и L_2, мы легко убеждаемся в том, что

$$L_1(z^k)+L_2(c_k z^k)=0, \quad k=0, 1, \ldots,$$

т. е. что система $\{z^k, c_k z^k\}$ не полна в $A_R^{(2)}$ ни для какой последовательности $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Второе утверждение теоремы 3 немедленно следует из рассмотрения в $A_R^{(2)}$ системы

$$\{z^k, R^k e^{1/|\alpha_k|} f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty},$$

где функция $f(z)$ и последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Черновицкий государственный университет

Поступило
8 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1, 11 (1951). [2] М. В. Келдыш, УМН, 26, № 4, 15 (1971). [3] Дж. Э. Аллахвердиев, ДАН, 166, № 1, 11 (1966). [4] М. Г. Гасымов, Докл. АН АзербССР, 27, № 7 (1971). [5] А. И. Маркушевич, Матем. сборн., 17, № 2, 211 (1945). [6] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [7] Н. И. Нагнибида, Матем. замет., 7, № 3, 299 (1970). [8] И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», 1971.