Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 530.145 **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

Б. Г. КОНОПЕЛЬЧЕНКО, М. Я. ПАЛЬЧИК

ТЕОРИЯ ПОЛЯ И КОНФОРМНАЯ ГРУППА

(Представлено академиком С. Т. Беляевым 28 III 1973)

Рассматривается конформно-инвариантная теория поля. Существенно, что конформная инвариантность является асимптотической, так как заведомо нарушается наличием конечных масс у частиц. Представляет интерес, однако, рассмотреть теорию, обладающую строгой инвариантностью. Следуя [1], рассмотрим кинематические ограничения, вытекающие из структуры конформной группы. Мы покажем, что конформная инвариантность совместима с аксиомами теории поля лишь для узкого класса полей (имеющих дискретную размерность). В качестве примера рассмотрены конформные поля, аналогичные свободным релятивистским полям.

1. Пусть $\psi(x)$ — поле, преобразующееся по неприводимому представлению конформной группы. Мы ограничимся рассмотрением вырожденных представлений, в которых спин является инвариантом [2]. Соответствующие поля классифицируются по значениям масштабной размерности d и спина s. Операторы Казимира равны [4]

$$C_2=(d-2)^2-4+2s(s+1),$$
$$C_3=\pm(d-2)s(s+1),$$
$$C_4={}^1/_4(d-2)^4-(d-2)^2(s^2+s+1).$$

Рассмотрим состояния

$$\psi^+(x)\,|0\rangle. \tag{1}$$

Используя трансформационные свойства поля $\psi(x)$ и инвариантность вакуума, можно показать, что состояния (1) преобразуются как векторы пространства неприводимого представления (d, s). Инвариантное скалярное произведение $\langle d', s'|d, s\rangle$ таких векторов однозначно определяется их трансформационными свойствами и отлично от нуля только при $d'=d$, $s'=s$. Таким образом, состояния (1) образуют пространство неприводимого представления (d, s) (вообще говоря взятого с некоторой кратностью) и, следовательно, не зависят от характера взаимодействия. Отметим, что в Пуанкаре-инвариантной теории поля ситуация существенно иная. В этом случае вектор (1) имеет проекции на состояния с различными P^2, т. е. преобразуется по бесконечной прямой сумме неприводимых представлений.

Покажем, что свойства состояний (1) совместимы с аксиомами поля лишь для полей с дискретной размерностью.

1) П о л о ж и т е л ь н о с т ь н о р м ы. Инвариантная метрика в пространстве состояния (1) положительно определена в том и только в том случае, если соответствующее представление унитарно [3]. Требование унитарности ограничивает спектр значений операторов Казимира, что ведет к ограничениям на возможные значения масштабной размерности.

2) С п е к т р а л ь н о с т ь. Импульсы состояния (1) должны удовлетворять условию

$$P^2>0, \quad P_0>0. \tag{2}$$

Это условие выполняется только в представлениях дискретных серий [4]. В остальных вырожденных унитарных представлениях либо $P^2<0$, либо

$-\infty<P^2<\infty$. Для дискретных серий находим [4], учитывая [2]

$$d=2+s+n, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Для поля с размерностью (3) (преобразующегося по представлению $(s, 0)$ группы Лоренца) имеем [4]

$$\langle 0|\psi_\sigma(x)\psi_\Sigma^+(y)|0\rangle \sim \Pi_{\sigma\Sigma}^{(s)}(i\partial)(-\Box)^{d-2-s}[(x-y)^2-i\varepsilon(x_0-y_0)]^{-2}, \tag{4}$$

где $\Pi_{\sigma\Sigma}^{(s)}(i\partial)=t_{\sigma\Sigma}^{\mu_1,\ldots,\mu_{2s}}(i\partial_{\mu_1})\ldots(i\partial_{\mu_{2s}})$; $t_{\sigma\Sigma}^{\mu_1,\ldots,\mu_{2s}}$ — симметричный бесследный тензор (1) и $\Box=\partial_0^2-\partial^2$.

Другие значения размерности (если $s\neq 0$) соответствуют действительным неунитарным представлениям. Инвариантная метрика в пространстве таких представлений индефинитна и часть состояний (1) имеет отрицательную норму. В случае скалярных полей имеется дополнительная непрерывная серия, в которой

$$1<d<3. \tag{5}$$

Однако для таких полей не выполнено условие (2), так как $-\infty<p^2<\infty$ и, следовательно [4],

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi^+(y)|0\rangle \sim \operatorname{tg}\frac{\pi d}{2}\,\varepsilon((x-y)^2)\,|(x-y)^2|^{-d}. \tag{6}$$

Таким образом, конформно-инвариантная теория поля удовлетворяет обычным требованиям только для дискретных размерностей (3).

Аналогичная ситуация имеет место для полей в двумерном пространстве времени [5]. Вместо (3) имеем

$$d=1+s+n.$$

Для модели Тирринга, где

$$d={}^1/_2+(\lambda/(2\pi))^2[1-(\lambda/(2\pi))^2]^{-1},$$

это приводит к квантованию константы связи λ:

$$(\lambda/(2\pi))^2=(n+1)/(n+2).$$

Аналогичная ситуация имеет место в модели Федербуша [6], где конформная инвариантность является асимптотической.

2. Рассмотрим конформные поля, аналогичные свободным релятивистским полям. Они являются простейшей конструкцией, в которой отражены групповые свойства теории. Пространство состояния таких полей состоит из прямых произведений векторов (1).

1) Дискретные серии. Ввиду (2) поле $\psi_\sigma(x)$ может быть инвариантным образом разделено на положительно- и отрицательно-частотные части. Если принять обычную связь спина и статистики, находим, учитывая (4),

$$\{\psi_\sigma(x), \psi_\Sigma^+(y)\}_\pm = \frac{2}{\pi i}\Pi_{\sigma\Sigma}^{(s)}(i\partial)(-\Box)^{d-2-s}\varepsilon(x_0-y_0)\delta'((x-y)^2). \tag{7}$$

Для полей, преобразующихся по представлению $(0, s)$ группы Лоренца, коммутатор (антикоммутатор) имеет вид (7) с заменой

$$\Pi^{(s)}(i\partial)\to\overline{\Pi}^{(s)}(i\partial)=\Pi^{(s)}(i\partial_0, -i\partial).$$

Отметим, что коммутатор (антикоммутатор) полей $\psi_\sigma(x)$ отличен от нуля только на световом конусе. Поля $\psi_\sigma(x)$ являются обобщенными свободными полями.

2. Скалярные поля с аномальной размерностью. Эти поля преобразуются по унитарным представлениям дополнительной непрерывной серии. Размерность принимает значения в интервале (5). Спектр P^2 есть: $-\infty<P^2<\infty$. Эти поля нельзя инвариантным образом разделить на

положительно- и отрицательно-частотные части. Коммутатор имеет вид [6]

$$\{\varphi(x), \varphi^+(y)\} = \langle 0|\varphi(x)\varphi^+(y)|0\rangle.$$

Поля $\varphi(x)$ не локальны и не имеют наинизшего энергетического состояния. Нет никаких теоретико-групповых оснований для выбора определенной статистики. Если размерность принимает значения вне интервала (5), имеются состояния с отрицательной нормой ([4]).

Авторы благодарны А. З. Паташинскому и Ю. Б. Румеру за плодотворные обсуждения.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
16 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Weinberg, Phys. Rev., **133B**, 1318 (1964); **134B**, 882 (1964); Ю. Б. Румер, Квантовые поля и теория групп. Курс лекций Новосибирского гос. унив., Новосибирск, 1973. [2] Tsu Yao, J. Math. Phys., 9, 1615 (1968); 12, 315 (1971). [3] М. Хамермеш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, М., 1966. [4] Б. Г. Конопельченко, М. Я. Пальчик, Препринт Инст. ядерн. физики АН СССР, 1973. [5] Б. Г. Конопельченко, М. Я. Пальчик, Препринт Инст. ядерн. физики АН СССР, 44—72, 90—72, 94—72, 1972; F. Gürsey, S. Orfanidic, Preprint, Yale University, 1972. [6] P. Federbush, Phys. Rev., 121, 1247 (1961).