Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. З. ФЕЙНБЕРГ

КОМПАКТНЫЕ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 22 VI 1973)

1. Метрическое пространство (X, d), в котором выполняется усиленное неравенство треугольника

$$d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(z, y)), \quad x, y, z \in X,$$

называется ультраметрическим (или неархимедовым) пространством ([1]). Систематическое изложение свойств ультраметрических пространств дано в ([2]). Монна ([3]) в связи с предпринятыми им исследованиями по неархимедову анализу поставил вопрос об ультраметризуемости топологических пространств. Решение этого вопроса содержится в ([4–6]) (ср. ([7, 8])). В этих работах показано, что класс ультраметризуемых пространств совпадает с классом метризуемых нульмерных пространств. Аналогичный вопрос для топологических групп решен в ([9, 10]). Другим аспектам ультраметризуемых и нульмерных метрических пространств посвящены работы ([11–13]) и § 26 из ([14]).

Сделаем несколько замечаний относительно терминологии. Если безразлично, какой шар рассматривается, замкнутый или открытый, то говорим просто о шаре. Шар B радиуса r с центром в x обозначим $B(x, r)$. Шар B максимален в пространстве X, если $B \subset X$ и $B \subseteq C \subseteq X$ влечет $C = B$ или $C = X$, C — шар из X. Если метрические пространства X и Y изоморфны, то пишем $X \sim Y$. Ниже мы пользуемся свойствами шаров ультраметрического пространства, приведенными в предположении 1. Доказательство этих свойств можно найти в ([2]).

Предложение 1. *Пусть (X, d) — ультраметрическое пространство, тогда:*

1) *либо шар $B(x, r)$ является одновременно и открытым и замкнутым множеством и $B(x, r) = B(y, r)$ для любого $y \in B(x, r)$;*

2) *если два шара в пространстве (X, d) имеют общую точку, то один из них содержится в другом;*

3) *расстояние между любыми двумя точками двух непересекающихся шаров пространства (X, d) не зависит от выбора этих точек в каждом из них и, следовательно, можно говорить о расстоянии между этими шарами.*

2. Теорема 1 (критерий компактности). *Ультраметрическое пространство (X, d) компактно тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *всякая неубывающая последовательность $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_i \subseteq \ldots$ шаров B_i пространства (X, d) обрывается через конечное число шагов, т. е. $B_i = B_{i+1} = B_{i+2} = \ldots$ для некоторого i;*

2) *всякая убывающая последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots \supset B_i \supset \ldots$ шаров B_i пространства (X, d) такова, что $\lim\limits_{i \to \infty} r_i = 0$ и $\bigcap\limits_i B_i \neq \varnothing$, r_i — радиус шара B_i;*

3) *всякий шар B пространства (X, d), $|B| > 1$, можно представить в виде объединения $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_i$ конечного числа $i \geqslant 2$ шаров $B_1, B_2, \ldots, B_i$.*

Следствие 1. *Каждый шар компактного ультраметрического пространства (X, d), $|X| > 1$, содержится в некотором максимальном шаре X_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, пространства (X, d), отличном от X, и, следовательно, X*

единственным образом представляется в виде

$$X=X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_m,\quad m\geqslant 2,\quad X_i\cap X_j=\emptyset,\quad x\neq j,$$

причем, $d(x, y)=r$ *для любых* $x\in X_i$, $y\in X_j$, $i\neq j$, $r=\max\{d(x, y)\mid x, y\in X\}$.

Теорема 2. *Пусть* $X=(X, d)$ *и* X_i, $1\leqslant i\leqslant m$, *такие же, как и в следствии 2. Положим* $r_1=r_1(X)=\max\{d(x, y)\mid x, y\in X\}, \ldots, r_n=r_n(X)=\max\{r_{n-1}(x_i)\mid i=1, 2, \ldots, m\}$.

Тогда последовательность $r_1>r_2>\ldots>r_n>\ldots$ *отличных от нуля чисел* r_n *либо обрывается в случае конечного* X, *либо (если* $|X|=\infty$*) стремится к нулю.*

Из этой теоремы и следствия 1 теоремы 1, в свою очередь, вытекает

Теорема 3. *Пусть* (X, d) — *компактное ультраметрическое пространство.*

Тогда множество различных ненулевых значений метрики $d(x, y)$ *либо конечно, либо образует монотонно убывающую к нулю последовательность* $c_1>c_2>\ldots>c_n>\ldots$, $c_n>0$.

Отметим, что в ([1]), стр. 79, утверждается только изолированность на действительной прямой каждого значения ультраметрики $d(x, y)$, что значительно слабее утверждения теоремы 3.

3. Компактные ультраметрические пространства и локально-конечные деревья. (Относительно употребляемой здесь терминологии и обозначений см. ([16]).)

Пусть $\Gamma=(V, U)$ — неориентированное дерево с множеством вершин V и множеством ребер U, у которого отмечена одна вершина v_0 — корень дерева Γ. Такое дерево принято называть корневым деревом и обозначать $\Gamma=(V, U, v_0)$. Пусть каждому ребру $u\in U$ дерева Γ сопоставлено некоторое число $l(u)>0$ — длина ребра u, а корню v_0 — его вес $p=p(v_0)>0$. Под длиной цепи такого дерева Γ будем понимать сумму длин составляющих эту цепь ребер плюс p, если эта цепь содержит корень v_0. Максимальную цепь вида $v=(v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$, $(v_i, v_{i+1})\in U$, $i=0, 1, 2, \ldots$, назовем ветвью дерева Γ. Для двух ветвей v, v', $v'=(v_0=v_0', v_1', v_2', \ldots, v_n'\ldots)$, обозначим $\rho(v, v')$ длину цепи, являющуюся общей частью ветвей v и v', $v\neq v'$, т. е.

$$\rho(v\ v')=p+\sum_{i=0}^{n-1} l(v_i, v_{i+1})=p+\sum_{i=0}^{n-1} l(v_i', v_{i+1}'),$$

если $v_i=v_i'$ для $0\leqslant i\leqslant n$, но $v_{n+1}\neq v'_{n+1}$. Оказывается, функция $d(v, v')=1/\rho(v, v')$, определенная на множестве X всех ветвей, $v, v'\in X$, дерева $\Gamma=(V, U, v_0)$ (при условии, что $d(v, v)=0$) допускают следующую простую характеризацию.

Предложение 2. *Пара* (X, d) *является ультраметрическим пространством.*

Пространство (X, d) назовем ультраметрическим пространством, ассоциированным с деревом $\Gamma=(V, U, v_0)$.

Дерево $\Gamma=(V, U)$ называется локально-конечным, если степень каждой его вершины конечна.

Следующая теорема, являющаяся по существу переформулировкой теоремы 1, дает очень наглядное представление компактных ультраметрических пространств как пространств ассоциированных с локально-конечными деревьями.

Теорема 1'. *Пространство* (X, d), *ассоциированное с деревом* $\Gamma=(V, U, v_0)$, *компактно тогда и только тогда, когда дерево* Γ *локально-конечно и для любой бесконечной ветви* $v\in X$, $v=(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} l(v_i, v_{i+1})=\infty,\quad (v_i, v_{i+1})\in U.$$

Каждое компактное ультраметрическое пространство (X, d) можно рассматривать как ультраметрическое пространство, ассоциированное с некоторым деревом $\Gamma=(V, U, v_0)$. Отметим, что все «странные» свойства ультраметрических пространств (часть из которых собрана в предложении 1) допускают очень простую и наглядную интерпретацию на языке деревьев и становятся, с этой точки зрения, весьма естественными.

4. Лексикографический порядок. Ниже для определенности слово шар означает замкнутый шар.

Согласно п. 2) предложения 1 любые два шара радиуса r ультраметрического пространства (X, d) либо не пересекаются, либо совпадают и поэтому множество $\{B_i\}$, $i\in I$, всех шаров пространства (X, d) данного радиуса r образует разбиение

$$X=\cup B_i, \quad B_i\cap B_j=\varnothing, \quad i\neq j, \quad i, j\in I.$$

Согласно п. 3) предложения 1 ультраметрика d на множестве всех шаров радиуса r естественным образом индуцирует ультраметрику d_r:

$$d_r(B_i, B_j)=0\Leftrightarrow i=j, \quad i, j\in I; \quad d_r(B_i, B_j)=d(x, y), \quad x\in B_i, \quad y\in B_j, \quad i\neq j.$$

Обозначим это пространство X/r и назовем его фактор-пространством X по r, $X/r=(\{B_i\}_{i\in I}, d_r)$.

Теорема 4. *Пусть (X, d) и (X', d') — компактные ультраметрические пространства и для некоторой стремящейся к нулю последовательности $\{r_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$, $r_n>0$, $n=1, 2, \ldots$, фактор-пространства X/r_n и X'/r_n изоморфны.*

Тогда изоморфны и сами пространства (X, d) и (X', d').

Пусть $X=(X, d)$, $|X|>1$,— компактное ультраметрическое пространство и $X=X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_m$, $X_i\cap X_j=\varnothing$, $i\neq j$,— разложение X на максимальные шары, X_i, $1\leqslant i\leqslant m$, $m\geqslant 2$, такие, как и в следствии 1 теоремы 1. Пусть $r_0(X)=\infty$, $r_1(X)=\max\{d(x, y)\,|\,x, y\in X\}, \ldots, r_n(X)=\max\{r_{n-1}(X_i)\,|=i=1, \ldots, m\}$; тогда в силу теоремы 2 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$. Везде ниже, если не оговорено противное, $r_n=r_n(X)$, $r_n'=r_n(X')$, $n=0, 1, 2, \ldots$

Введем в рассмотрение целочисленную функцию $\pi(X, X')=\pi(X', X)$, принимающую значения $0, 1, 2, \ldots, \infty$ и определенную для любой пары компактных пространств X, X'. Равенство $\pi(X, X')=0$ означает, что $\{i\geqslant 0\,|\,r_i=r_i'$ и $X/r_i\sim X'/r_i\}=\varnothing$. Равенство $\pi(X, X')=\infty$ означает, что $\{i\geqslant 0\,|\,r_i=r_i'$ и $X/r_i\sim X'/r_i\}=\{0, 1, 2, \ldots\}$. В силу теоремы 4 это имеет место тогда и только тогда, когда $X\sim X'$. В остальных случаях положим $\pi(X, X')=\max\{i\geqslant 0\,|\,r_i=r_i'$ и $X/r^i\sim X'/r_i\}$. Нетрудно проверить, что $\pi(X, X')$ удовлетворяет соотношению $\pi(X, X')\geqslant\min(\pi(X, X''), \pi(X', X''))$. Если $\pi(X', X'')$ — наибольшее из чисел $\pi(X, X')$, $\pi(X, X'')$, $\pi(X', X'')$, то $\pi(X, X')=\pi(X, X'')\leqslant\pi(X', X'')$. Очевидно, что $\tau(X, X')=1/[1+\pi(X, X')]$ удовлетворяет ультраметрическому соотношению $\tau(X, X')\leqslant\max(\tau(X, X''), \tau(X', X''))$. Поэтому $\tau(X, X')$, $0\leqslant\tau(X, X')\leqslant 1$, можно рассматривать как меру близости компактных ультраметрических пространств, значение которой только на изоморфных пространствах, в силу теоремы 4, равно нулю. Пусть X и X' — компактные пространства, если $r_1(X)\neq r_1(X')$, то положим $X<_0<X'\Leftrightarrow r_1(X)<r_1(X')$. Очевидно, $<_0$ — частичный квазипорядок на множестве всех компактных пространств. Несравнимыми элементами при таком упорядочении будут все такие пары X и X', для которых $r_1(X)=r_1(X')$ или, что то же самое, для которых $\pi(X, X')>1$.

Рассмотрим бинарное отношение $<_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющее условиям I, II, III и условию IV, если $n>0$:

I. Если $X<_nX'$, то $\pi(X, X')\leqslant n$.

II. Если $\pi(X, X')\leqslant n$, то либо $X<_nX'$, либо $X'<_nX$, но не оба одновременно.

III. $X<_nX'$ и $X'<_nX''$ влечет $X\leqslant_nX''$.

IV. $X<_nX'$ тогда и только тогда, когда последовательность

$$X_1/r_{n+1}, \; X_2/r_{n+1}, \ldots, \; X_m/r_{n+1} \tag{1}$$

$<_{n-1}$-лексикографически меньше последовательности

$$X_1'/r'_{n+1}, X_2'/r'_{n+1}, \ldots, X_k'/r'_{k+1}, \tag{2}$$

либо когда последовательности (1) и (2) $<_{n-1}$-лексикографически несравнимы и $r_{n+1}<r'_{n+1}$. Остановимся подробнее на условии IV. Положим $X\sim_n Y$, если $\pi(X, Y)>n$, и скажем, что X и $Y\sim_n$-эквивалентны. Нетрудно показать, что любое множество $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ компактных ультраметрических пространств можно единственным образом (с точностью до $\sim_n$-эквивалентности) расположить в неубывающем порядке относительно отношения $<_n$. Говорят, что $<_n$-неубывающая последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_m$ $<_n$-лексикографически меньше $<_n$-неубывающей последовательности $X_1', X_2', \ldots, X_k'$, если $m<k$, или $m=k$, и $X_1\sim_n X_1'$, $X_2\sim_n X_2', \ldots$ $\ldots, X_{i-1}\sim_n X'_{i-1}$, но $X_i<_n X_i'$ для некоторого $1\leqslant i\leqslant m$.

Предложение 3. *Пусть для каждого $n=0, 1, \ldots, l$ существует бинарное отношение $<_n$, удовлетворяющее условиям* I—IV.

Тогда существует единственное бинарное отношение $<_{l+1}$, удовлетворяющее условиям I—IV *и условию*

V. $X<_l X' \Leftrightarrow X<_{l+1} X'$, $\pi(X, X')=l$.

Предложение 3 позволяет ввести отношение $\leqslant$ линейного порядка на множестве всех компактных ультраметрических пространств (точнее на классах изоморфных пространств), полагая $X<Y$, если $X\nsim Y$ и для некоторого $n=0, 1, 2, \ldots, X<_n Y$. Это определение корректно. В самом деле, если для любого $n\geqslant 0$, X и Y несравнимы относительно $<_n$, то $X\sim_n Y$. А так как $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$, то в силу теоремы 4, $X\sim Y$.

Предложение 4. *Пусть X и X' — неизоморфные компактные ультраметрические пространства и $X=X_1\cup X_2\cup \ldots \cup X_m$; $X'=X_1'\cup X_2'\cup \ldots \cup X_k'$ — их разложения на максимальные шары, и пусть последовательности*

$$X_1, X_2, \ldots, X_m, \tag{3}$$
$$X_1', X_2', \ldots, X_k' \tag{4}$$

расположены в неубывающем порядке относительно введенного выше отношения линейного порядка $\leqslant$.

Тогда $r_1(X)<r_1(X')$ влечет $X<X'$, если $r_1(X)=r_1(X')$, то $X<X'$ в том и только том случае, если последовательность (3) *лексикографически меньше последовательности* (4).

Можно доказать, что линейный порядок, удовлетворяющий условиям предложения 4, единствен.

Теорема 5. *Пусть X, X' и X'' — произвольные компактные ультраметрические пространства и пусть $X<X'$, тогда $X\times X''<X'\times X''$, где $\times$ означает прямое произведение ультраметрических пространств.*

Следствие 1. *Из $X\times Y\sim X'\times Y$ следует $X\sim X'$.*

Следствие 2. *Из $X^n\sim Y^n$ следует $X\sim Y$, X^n — n-я степень пространства X.*

Поступило
17 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, М., 1964. [2] M. Krasner, Theorie des corps values, Semin. M. Krasner, Foc. sci. Paris, 1953—1954, 1, 1956. [3] A. F. Monna, Neder. Acad. Wetensch., 53, 470 (1950). [4] J. de Groot, Proc. Am. Math. Soc., 7, № 5 (1956). [5] J. de Groot, H. de Vries, Indagationes Math., 17, № 2 (1955). [6] J. Nagata, Proc. Japan Acad. 32, № 4 (1956). [7] Ю. Смирнов, УМН, 6, № 6 (1951). [8] Ю. Смирнов, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, № 2 (1956). [9] G. Rangan, Fund. Math., 68, № 2 (1970). [10] K. Hofman, Fund. Math., 68, № 3 (1970). [11] Б. Левшенко, Ю. Смирнов, Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra, 2, Praque, 1967. [12] В. Фейнберг, ДАН, 202, № 4 (1972). [13] B. Bonaschewski, Math. Nachr., 13, № 3–4 (1955). [14] К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966. [15] А. Курош, Лекции по общей алгебре, М., 1962. [16] А. Зыков, Теория конечных графов, 1, «Наука», 1966.