

## ДЕЦЕНТРИРОВАННЫЕ ЦИРКУЛЯРНЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА – ГАУССА РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

**С.С. Гиргель**

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

### DECENTERED CIRCULAR KUMMER – GAUSS BEAMS OF VARIOUS TYPES

**S.S. Girgel**

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для децентрированных циркулярных световых пучков Куммера – Гаусса различных типов. Анализируются различные варианты, включающие как новые типы пучков, так и частные случаи, включающие известные пучки Лагерра – Гаусса. Сформулированы ограничения на свободные параметры, чтобы такие децентрированные пучки Куммера – Гаусса переносили конечную мощность. Графически исследуется влияние различных свободных параметров на картины интенсивности таких пучков.

**Ключевые слова:** параксиальные пучки, циркулярные пучки, пучки Куммера – Гаусса, децентрированные пучки.

**Для цитирования:** Гиргель, С.С. Децентрированные циркулярные пучки Куммера – Гаусса различных типов / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 14–19. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_4\\_65\\_14](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_14). – EDN: ZOXOSH

**Abstract.** The analytical expressions in closed form are proposed and investigated for various types of decentered circular Kummer – Gauss light beams. Various options are analyzed, including both new types of beams and special cases involving well-known Laguerre – Gauss beams. The constraints on free parameters are formulated so that such decentered Kummer – Gauss beams carry finite power. The influence of various free parameters on the intensity patterns of such beams is investigated graphically.

**Keywords:** paraxial beams, circular beams, Kummer – Gauss beams, decentered beams.

**For citation:** Girgel, S.S. Decentered circular Kummer – Gauss beams of various types / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 14–19. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_4\\_65\\_14](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_14) (in Russian). – EDN: ZOXOSH

### Введение

Общий подход для изучения циркулярных световых пучков был предложен в [1], [2]. Такие пучки мы будем называть циркулярными пучками Куммера – Гаусса (КГ). Скалярные оптические циркулярные пучки КГ исследовались в [1]–[3]. Обобщение на векторный случай – в [4].

Более общие пучки КГ возникнут, если осуществить комплексное смещение поперечных координат. Авторы [5] называют такого типа пучки смещенными. Мы будем называть такие пучки децентрированными. Децентрированные пучки Бесселя – Гаусса обсуждались в [6], а децентрированные декартовы пучки КГ – в [7].

В настоящей работе будут исследоваться децентрированные циркулярные пучки КГ. Кроме того, будут учитываться возможные различные типы угловой симметрии:  $e^{im\varphi}$  и  $\cos(m\varphi)$ .

### 1 Децентрированные циркулярные пучки Куммера – Гаусса

Ограничимся обсуждением параксиальных скалярных оптических пучков. Параболическое

нормированное уравнение имеет форму  $(\partial_{X,X}^2 + \partial_{Y,Y}^2 + 4i\partial_Z)f = 0$ . Здесь  $X = x/x_0$ ,  $Y = y/x_0$ ,  $Z = z/z_0$ ,  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ . Параметры  $x_0$  и  $z_0 = kx_0^2/2$  – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям  $OX$  и  $OY$  соответственно.

Согласно [3], [4], комплексную амплитуду параксиального скалярного циркулярного пучка Куммера – Гаусса с цилиндрической симметрией в безразмерной форме можно записать как

$$f = \exp\left(\frac{iR^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v M \times \\ \times \left(-v, m+1, i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)\right) R^m f_3(m, \varphi), \quad (1.1)$$

где  $Q$  и  $P$  – введенные безразмерные комплексные параметры пучка:

$$Q = Z - Q_0, \quad P = Z - P_0, \quad (1.2)$$

причем  $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$  и аналогично для  $P_0$ . Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые части различных величин.

Обобщим формулу (1.1) в двух направлениях.

Во-первых, осуществим комплексную децентровку поперечных координат соотношениями  $X_d = X - iX_0$ ,  $Y_d = Y - iY_0$ ,  $\varphi_d = \arctan(X_0, Y_0)$ .

Во-вторых, для децентрированных циркулярных пучков КГ азимутальную зависимость  $f_2 \equiv R^m f_3(m, \varphi) = R^m \{e^{im\varphi}, \cos m\varphi\}$  представим двояким образом:

$$f_2 = \\ = \left\{ (X_d + iY_d)^m, \frac{1}{2} \left( (X_d + iY_d)^m + (X_d - iY_d)^m \right) \right\}. \quad (1.3)$$

Комплексная амплитуда децентрированного циркулярного пучка КГ теперь имеет форму  $f = f_1 f_2$ , где для множителя  $f_1$  достаточно использовать два варианта:

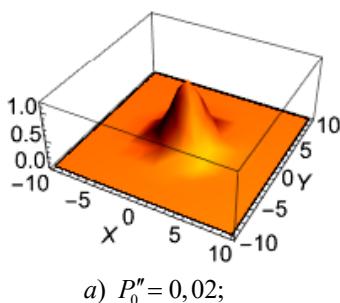
$$f_1 = \begin{cases} \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v M \times \\ \times \left(-v, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right), \\ \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} M \left(-v, m+1; -\frac{iR_d^2}{Q}\right) \end{cases}. \quad (1.4)$$

В итоге, всё множество циркулярных децентрированных пучков КГ с различными азимутальными зависимостями можно представить в компактном виде, как совокупность четырех типов  $f = f_{1k} f_{2j}$ , где  $k, j = 1, 2$ .

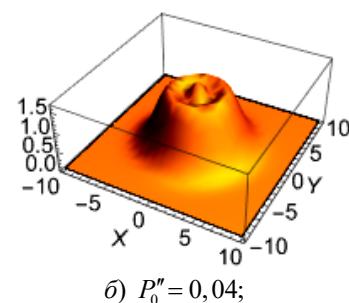
## 2 Исследование влияния свободных параметров на картины интенсивности децентрированных циркулярных пучков КГ

Будем анализировать сначала случай обобщенных циркулярных децентрированных пучков Куммера – Гаусса ( $gcdKG$ ), комплексная амплитуда которых равна

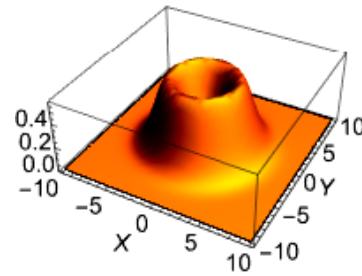
$$f_{gcdKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v \times \\ \times M\left(-v, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right) f_2 \quad (2.1)$$



a)  $P'' = 0,02$ ;



б)  $P'' = 0,04$ ;



б)  $P'' = 0,06$

Рисунок 2.1 – Влияние параметра  $P''$  на интенсивность  $gcdKG$  пучка

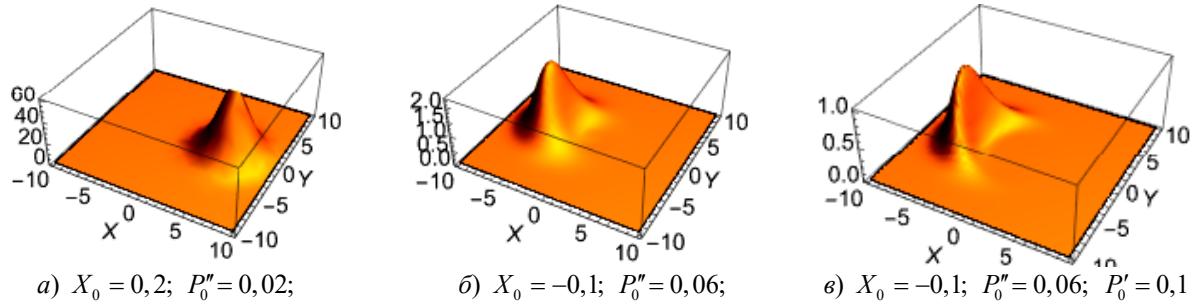
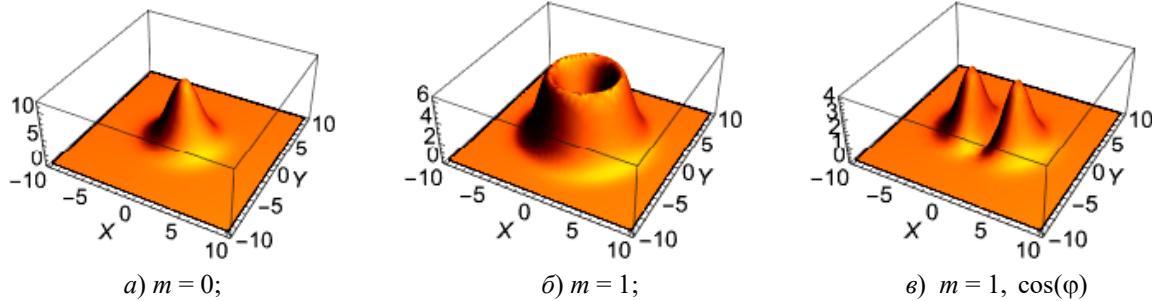
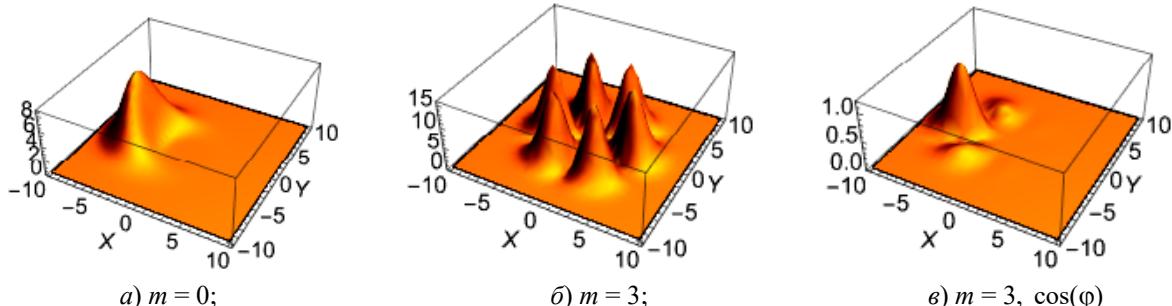
с азимутальной зависимостью  $e^{im\varphi}$ . Для физической реализуемости пучков, описываемых формулой (2.1), необходима квадратичная интегрируемость (КИ) функций  $f_{gcdKG}$ . Последняя осуществляется при следующих ограничениях  $\{Q'' > 0_0, P'' > 0\}$ , налагаемых на свободные параметры. Существенно, что при этом радиальный индекс  $v$  может быть произвольным комплексным.

С помощью системы компьютерной математики Mathematica далее будет изучаться влияние различных свободных параметров на ненормированные картины интенсивности  $gcdKG$  пучков. Для большей наглядности мы изображаем интенсивность в условных единицах в поперечном сечении пучка не плоской, а 3D картиной. В большинстве вариантов будем использовать угловую зависимость в виде  $e^{im\varphi}$ , если не оговорено обратное. Везде полагаем  $Y_0 = 0$ , поскольку влияние параметра  $Y_0$  на физические свойства пучка совершенно такое же, как и влияние параметра  $X_0$ . Компьютерное моделирование интенсивности в поперечном сечении  $gcdKG$  пучков показывает, что, как правило, наблюдается одно кольцо или одно пятно.

Простейший случай, когда  $v = 0$ . Тогда возникает гауссов пучок с внедренным оптическим вихрем, который уже исследовался.

Интересен вариант, когда  $v = iv''$ , т. е. радиальный индекс  $v$  – чисто мнимый. Такие пучки пока не исследовались. Возьмем, для определенности, следующие значения параметров  $\{Q''_0 = 0,02; X_0 = 0; P'_0 = Q'_0 = 0; m = 0; v' = 0; Z = 0,5; v'' = -4,5\}$  и рассмотрим трансформацию картин интенсивности пучка при вариациях параметра  $P''_0$  (рисунок 2.1).

Видим, что при возрастании параметра  $P''_0$  вокруг центрального пика постепенно возникает кольцо, а центральное пятно пропадает. Так как  $m = 0$  и  $X_0 = Y_0 = 0$ , то картины интенсивности обладают вращательной симметрией вокруг оси пучка  $OZ$ .

Рисунок 2.2 – Совместное влияние параметров  $X_0$  и  $P_0''$  на интенсивность gcdKG пучкаРисунок 2.3 – Зависимость интенсивности gcdKG пучка от индекса  $m$ . Общие параметры:  $X_0 = 0; P_0'' = 0,02$ Рисунок 2.4 – Зависимость интенсивности gcdKG пучка от параметров  $P_0''$  и индекса  $m$ .Общие параметры:  $X_0 = -0,1; P_0'' = 0,02$ 

При возрастании параметров  $v', Q'_0, P_0'', Q''_0$  картины интенсивности расширяются и качественно почти не изменяются (рисунки 2.2, 2.3).

Таким образом, децентровка поперечных координат  $X$  и  $Y$  качественно видоизменяет картины интенсивности, возникает полумесец. Иначе, изменение параметра  $X_0$  приводит к сильной деформации и смещению картины вдоль оси  $OY$ .

Сейчас будем менять угловой индекс  $m$ . Если  $m = 1, 2, \dots$ , то вместо пика имеем кольцеобразную картину.

Картины рисунка 2.4, б) аналогичны картинам стандартных пучков Лагерра – Гаусса. Подчеркнем, однако, что здесь радиальный параметр  $v$  не целочисленный, а чисто мнимый нецелый. Замена азимутального множителя  $e^{im\varphi}$  на  $\cos m\varphi$  качественно изменяет картины интенсивности (рисунок 2.4, в).

2. Будем анализировать теперь случай gcdKG пучков, у которых комплексная амплитуда

$$f_{gcdKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-n-m-1} P^v \times \\ \times M\left(-n, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right) f_2. \quad (2.2)$$

Здесь, по-прежнему,  $Q'_0 > 0$ , однако  $v \equiv n = 0, 1, 2, \dots$ , а мнимая часть  $P_0''$  второго комплексного параметра пучка  $P$  может принимать любые значения, исключая  $P'' = 0$ .

Если теперь исключить децентровку поперечных координат, то приходим к обобщенным пучкам Лагерра – Гаусса, по терминологии [1], [2].

2.1. Пусть  $P_0'' < 0$ . Такие пучки для произвольных  $P_0'' < 0$  пока еще не исследовались.

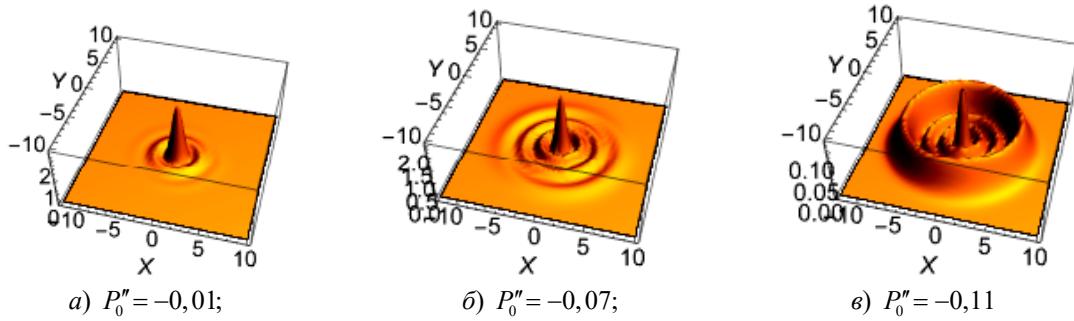


Рисунок 2.5 – Влияние параметра  $P_0''$  на интенсивность  $gcdKG$  пучка

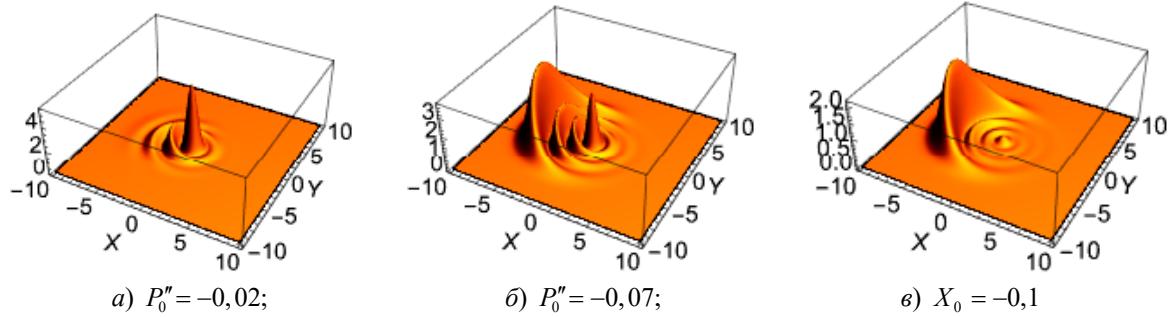


Рисунок 2.6 – Влияние параметров  $P_0''$  и  $X_0$  на интенсивность  $gcdKG$  пучка. Постоянный параметр  $X_0 = -0,1$

В качестве примера рассмотрим пучки с параметрами  $\{Z = 0,7; m = 0; n = 3; Q_0'' = 0,8; Q_0' = P_0' = 0\}$ . При  $P_0'' = -0,01$  наблюдается яркий центральный пик и практически одно кольцо. При последующем убывании параметра  $P_0''$  постепенно появляются еще три кольца. В дальнейшем самое широкое кольцо относительно растет, а остальные уменьшаются. Децентровка и приводит к деформации и смещению картины интенсивности вдоль оси  $OY$  (рисунок 2.6).

2.2. При  $P_0'' = -Q_0''$  приходим фактически к стандартным пучкам Лагерра – Гаусса. Для конкретности возьмём первоначальные параметры  $\{Z = 0,7; X_0 = 0; m = 1; n = 3; Q_0'' = 0,8; P_0'' = -0,8; Q_0' = P_0' = 0\}$ . При этом кольца интенсивности наиболее четкие. При дальнейшем убывании параметра  $P_0''$  центральное кольцо продолжает возрастать, а остальные постепенно уменьшаются.

При увеличении параметров  $|Z|$ ,  $|Q_0'|$ ,  $|P_0'|$ , наоборот, центральное кольцо уменьшается, а остальные относительно растут.

Теперь проанализируем влияние мнимых децентровок  $X_0$  и  $Y_0$  поперечных координат на картины интенсивности рассматриваемых  $gcdKG$  пучков. При росте  $|X_0|$  (либо  $|Y_0|$ ) картины интенсивности сплющиваются вдоль оси  $OY$  (либо  $OX$ ). Если же  $(X_0 \neq 0, Y_0 \neq 0)$ , то наблюдается пятно эллипсовидной формы.

Если азимутальный параметр  $m = 0$ , то наблюдаются аналогичные закономерности. Только вместо центрального кольца выступает центральный пик (яркое пятно).

3. Теперь обсудим случай, когда  $Q_0'' > 0_0$ ,  $|P_0''| \rightarrow \infty$ , а параметр  $v = v' + iv''$  – комплексный. Здесь параметр пучка  $P$  отсутствует. Получаем циркулярные децентрированные элегантные Куммера – Гаусса ( $cdeKG$ ) пучки

$$f_{cdeKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} \times \\ \times M\left(-v, m+1; \frac{-iR_d^2}{Q}\right) f_2. \quad (2.3)$$

Если свободный комплексный параметр  $v$  удовлетворяет условию [1]  $v' > -(1+m)/2$ , тогда функция  $f_{cdeKG}$  обладает КИ. Отметим, что это – новый тип пучков, который не фигурирует в работах [1], [2]. Здесь, если параметр  $v$  становится вещественным, тогда пучки (2.3) редуцируются к децентрированным элегантным фракционным пучкам Лагерра – Гаусса ( $defLG$ ) [8]. Если дополнительно  $v \equiv n = 0, 1, 2, \dots$ , то мы приходим к обычным децентрированным элегантным пучкам Лагерра – Гаусса, введенным Сигмэнном ( $deLG$ ) [9].

Обсудим теперь влияние различных свободных параметров на картины интенсивности  $cdeKG$  пучков. Пусть  $v' > -(1+m)/2$ .

Если  $m = 1$ , тогда  $v' = -0,9$  удовлетворяет условию КИ (1.11). Этот вариант характеризует не  $eKG$  пучки и даже не  $defLG$ , а новый тип пучков ЛГ. Существенно, что здесь фигурируют не полиномы Лагерра, а функции Лагерра с непрерывным комплексным индексом  $v$ .

В простейшем случае  $Z = 0$ ,  $X_0 = 0$ ,  $Q'_0 = 0$ . Возьмем параметр  $Q''_0 = 0,8$ , чтобы выполнялось условие физической реализуемости пучка. Тогда картина интенсивности представляет собой простое кольцо. При возрастании параметра  $|v''|$  кольцо расширяется.

Если  $Z \neq 0$ , то образуется множество колец (рисунок 2.7). При возникновении децентровки  $X_0 \neq 0$ ; с ее увеличением край кольца в области  $Y > 0$  начинает постепенно убывать и картина кольца последовательно трансформируется в картину пика (максимума). При убывании параметра  $|X_0|$  эти процессы происходят в обратном направлении.

Еще интереснее ситуация, когда  $Q''_0$  мало (рисунок 2.8). Например, возьмем параметры  $\{v' = -0,9; v'' = 0; Q''_0 = 0,02; X_0 = 0; Q'_0 = 0; m = 0\}$ . Тогда картины интенсивности представляют собой бесконечное множество колец.

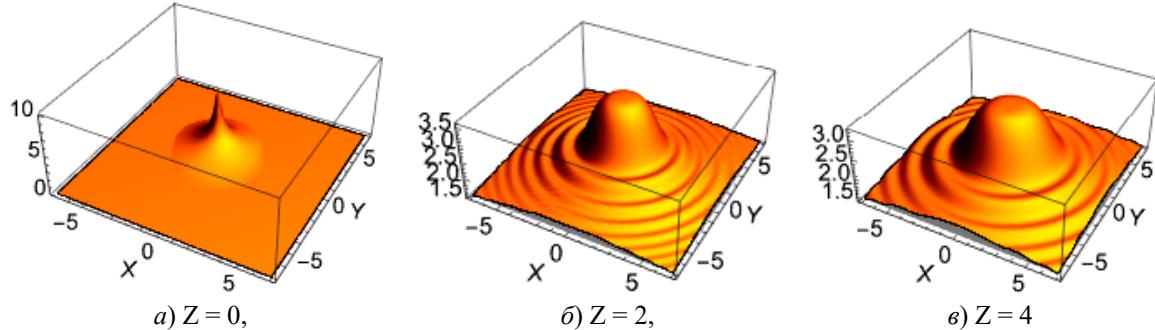


Рисунок 2.7 – Зависимость интенсивности  $cdeKG$  пучка от параметров  $P''_0$  и индекса  $m$ .

Общие параметры:  $X_0 = -0,1; P''_0 = 0,02; Q''_0 = 0,02$

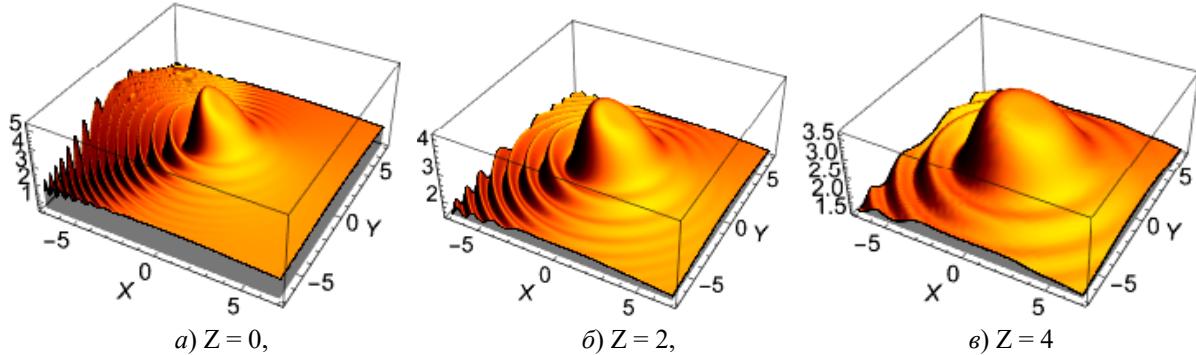


Рисунок 2.8 – Зависимость интенсивности  $cdeKG$  пучка от параметров  $P''_0$  и индекса  $m$ .

Общие параметры:  $v' = -0,9; v'' = 0; Q''_0 = 0,02; Y_0 = 0; Q'_0 = 0; m = 0; X_0 = -0,4$

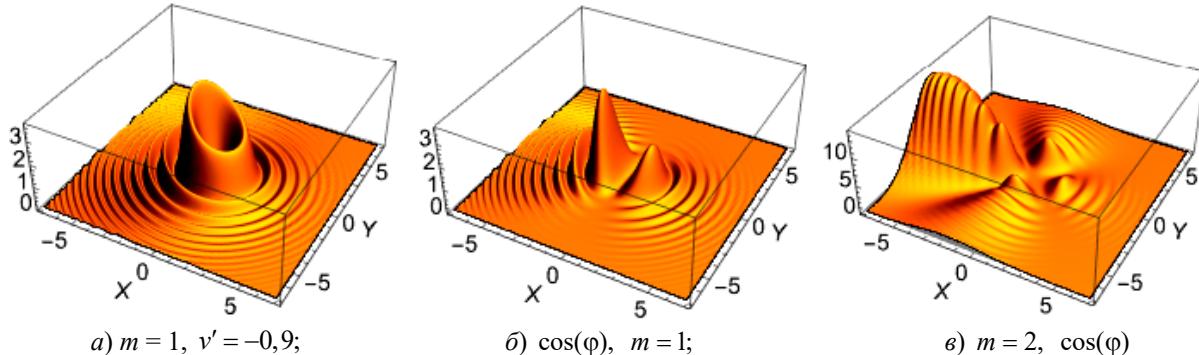


Рисунок 2.9 – Зависимость интенсивности  $cdeKG$  пучка от параметров  $P''_0$  и индекса  $m$ .

Общие параметры:  $v' = -0,9; v'' = 0; Q''_0 = 0,02; Q'_0 = 0; Z = 1; X_0 = -0,1$

Совершенно необычная картина интенсивности, изображенная на рисунке 2.9, б). Она обусловлена совместным влиянием двух факторов:  $m \neq 0$ ,  $X_0 \neq 0$ .

Итак, на рисунках 2.7–2.9 представлены некоторые характерные результаты графического моделирования интенсивности для пучков КГ. Картины интенсивности в поперечном сечении исследуемых световых пучков представляют собой кольца. Хотя число колец бесконечно, мощность пучка конечна. Однако чаще всего видно одно или несколько колец. Остальные кольца не видны из-за их слабой интенсивности. Кольца хорошо наблюдаются, если параметр  $v'$  близок к  $(v')_{\min}$ , а  $Q_0''$  мало. При  $m \neq 0$  изменение параметра  $v''$  слабо влияет на картину. Последняя качественно не изменяется.

### Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие практически не изучавшиеся типы пучков – параксиальные децентрированные циркулярные световые пучки КГ различных типов, переносящие конечную мощность и поэтому физически реализуемые. Они характеризуются шестью свободными параметрами: тремя вещественными –  $(m, X_0, Y_0)$  и тремя комплексными параметрами  $(Q_0, P_0, v)$ .

Сформулированы условия физической реализуемости циркулярных параксиальных пучков КГ с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Выполнено графическое моделирование их интенсивности для целочисленных значений  $m$ , непрерывных вещественных параметров  $X_0, Y_0$  и для непрерывных комплексных значений параметров  $Q_0, P_0, v$ . Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим картинам. Картины интенсивности – самые разнообразные. Множество свободных параметров позволяет варьировать в широких пределах физические свойства исследуемых пучков и, тем самым, расширяет возможности выбора пучков с наперёд заданными свойствами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bandres, M.A. Circular beams / Miguel A. Bandres, Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.
2. Bandres, M.A. Higher-order moments and overlaps of rotationally symmetric beams / M.A. Bandres, D. Lopez-Mago, J.C. Gutierrez-Vega // Journal of Optics. – 2010. – Vol. 12. – P. 015706.
3. Гиргель, С.С. Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель / Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 16–20.
4. Гиргель, С.С. Векторные циркулярные параксиальные пучки Куммера – Гаусса. Поляризация и энергетические свойства / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 7–11.
5. Ковалёв, А.А. Пучки Лагерра – Гаусса с комплексным смещением / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, С.Г. Засканов, Д.С. Калинкина // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 1. – С. 5–11.
6. Гиргель, С.С. Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 10–14.
7. Гиргель, С.С. Децентрированные пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета имени Ф. Скорины. – 2015. – № 6 (93). – 112–116
8. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / J.C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, iss. 10. – P. 6300–6313.
9. Siegman, A.E. Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // JOSA. – 1973. – Vol. 63, № 9. – P. 1093–1094.

Поступила в редакцию 29.08.2025.

### Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор