

УДК 524.882:536.782

DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_4\\_65\\_35](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_35)  
EDN: AITAVS

## СХОДСТВА И РАЗЛИЧИЯ ДЖОУЛЬ-ТОМСОНОВСКОГО РАСШИРЕНИЯ КЕРРОВСКИХ И ЗАРЯЖЕННЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР В АдС-ПРОСТРАНСТВЕ И ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

**О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков***Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

### SIMILARITIES AND DIFFERENCES OF JOULE – THOMSON EXPANSION OF KERR AND CHARGED BLACK HOLES IN AdS-SPACE AND TWO-PARAMETRIC FLUIDS

**V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov***Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** В работе изучено джоуль-томсоновское расширение Керровских и заряженных черных дыр в АдС-пространстве, а также двухпараметрических жидкостей. На основе уравнений состояния получены аналитические выражения для температур инверсии, построены инверсионные кривые в *TP*-плоскости и определены области положительного и отрицательного эффекта. Выявлены сходства и различия поведения черных дыр и двухпараметрических жидкостей в рассматриваемом процессе.

**Ключевые слова:** *АдС-пространство, Керровская чёрная дыра, заряженная чёрная дыра, двухпараметрические жидкости, расширение Джоуля – Томсона, кривая инверсии, области охлаждения и нагревания.*

**Для цитирования:** Новикова, О.В. Сходства и различия джоуль-томсоновского расширения Керровских и заряженных чёрных дыр в АдС-пространстве и двухпараметрических жидкостей / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 35–41. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_4\\_65\\_35](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_35). – EDN: AITAVS

**Abstract.** In the paper we study the Joule – Thomson expansion of Kerr and charged black holes in AdS-space, as well as two-parameter fluids. Based on the equations of state, analytical expressions for inversion temperatures are obtained, inversion curves in the *TP*-plane are constructed, and the regions of positive and negative effects are determined. Similarities and differences in the behavior of black holes and two-parameter fluids in the considered process are found.

**Keywords:** *AdS-space, Kerr black hole, charged black hole, two-parameter fluids, Joule – Thomson expansion, inversion curve, cooling and heating regions.*

**For citation:** Novikava, V.U. Similarities and differences of Joule – Thomson expansion of Kerr and charged black holes in AdS-space and two-parametric fluids / V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 35–41. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_4\\_65\\_35](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_35) (in Russian). – EDN: AITAVS

#### **Введение**

Начало термодинамике чёрных дыр было положено в ныне классических работах Бекенстайна и Хокинга [1], [2]. Термодинамическое изучение чёрных дыр в пространстве анти-дe-Ситтера (АдС-пространство), начатое в пионерской работе Хокинга и Пэйджа [3], было обобщено на случай наличия электрического заряда в работе [4], где авторы обнаружили аналогию между фазовыми диаграммами чёрных дыр и ван-дер-ваальсовской жидкости. Поэтому в последнее десятилетие делается акцент на возможность проведения сравнительного анализа поведения чёрных дыр и реальных жидкостей [5], [6] также в рамках процесса Джоуля – Томсона [7]. В данной работе мы рассмотрим и сравним джоуль-томсоновское расширение (или процесс Джоуля – Томсона) Керровской и заряженной

АдС чёрных дыр и двухпараметрических неидеальных жидкостей в модели Редлиха – Квонга, наиболее качественно описывающей данный процесс в классических макросистемах [8], а также в моделях Бергло, Дитеричи I, Дитеричи II.

Суть процесса Джоуля – Томсона заключается в следующем: макросистема изоэнталпически при  $H = Const$ , из области высокого давления переходит в область более низкого давления, что сопровождается изменением её температуры. При понижении температуры (охлаждении) эффект Джоуля – Томсона считается положительным, при повышении температуры (нагревании) – отрицательным. Производная, характеризующая процесс представима в виде [7]

$$\mu = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = - \frac{\lambda}{c_p} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T,$$

$$\lambda = \nu \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v, \quad (0.1)$$

где параметры процесса  $\mu$  и  $\lambda$  имеют знак, совпадающий со знаком эффекта, в данном случае, дифференциального.

Области положительного и отрицательного эффекта Джоуля – Томсона разделяются инверсионной кривой, удовлетворяющей условию  $\lambda = 0$ , при этом полагается, что  $T = T_i$ .

### 1 Джоуль-томсоновское расширение Керровской АдС чёрной дыры

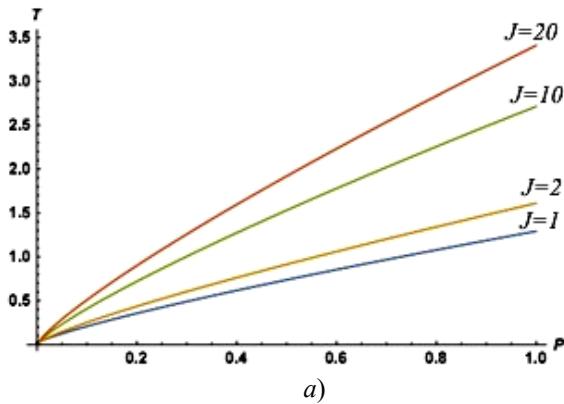
Вначале кратко коснёмся характеристик Керровской АдС чёрной дыры и основных её термодинамических свойств. Используем традиционную для теоретической астрофизики рациональную систему единиц с  $G = \hbar = k_B = c = 1$ .

Керровское приближение учитывает вращение чёрной дыры, что приводит к более сложной геометрии макросистемы, и в этом случае:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta}{\rho^2} \left( dt - \frac{a \sin^2 \theta}{\Xi} d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \\ &+ \frac{\rho^2}{\Delta_0} d\theta^2 + \frac{\Delta_0 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( adt - \frac{r^2 + a^2}{\Xi} d\phi \right)^2, \\ \Delta &= \frac{(r^2 + a^2)(l^2 + r^2)}{l^2} - 2mr, \quad \Delta_0 = 1 - \frac{a^2}{l^2} \cos^2 \theta, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Xi = 1 - \frac{a^2}{l^2}, \\ M &= \frac{m}{\Xi^2}, \quad J = a \frac{m}{\Xi^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $M$  – масса, допускающая интерпретацию в терминах энталпии [9];  $J$  – момент инерции. Если учесть энтропию  $S$  и давление  $P$ , то

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left( S + \frac{8PS^2}{3} \right)^2 + 4\pi^2 \left( 1 + \frac{8PS}{3} \right) J^2}{\pi S}}. \quad (1.1)$$



a)

Рисунок 1.1 – a) семейство кривых инверсии для Керровской АдС чёрной дыры, параметризованное моментом инерции  $J$ ;

- б) кривая инверсии для Керровской АдС чёрной дыры с  $J = 1$ , областями положительного (охлаждение) и отрицательного (нагревание) эффекта Джоуля – Томсона и изоэнталпами

Первый закон термодинамики имеет вид  $dM = TdS + VdP + \Omega dJ$ , что приводит к следующим соотношениям для температуры  $T$ , объёма  $V$  и угловой скорости  $\Omega$

$$T = \left( \frac{\partial M}{\partial S} \right)_{J,P} = \frac{1}{8\pi M} \left[ \left( 1 + \frac{8PS}{3} \right) (1 + 8PS) - 4\pi^2 \left( \frac{J}{S} \right)^2 \right], \quad (1.2)$$

$$V = \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,J} = \frac{2}{3\pi M} \left[ S \left( S + \frac{8PS^2}{3} \right) + 2\pi^2 J^2 \right], \quad (1.3)$$

$$\Omega = \left( \frac{\partial M}{\partial J} \right)_{S,P} = \frac{\pi J}{MS} \left( 1 + \frac{8PS}{3} \right). \quad (1.4)$$

При постоянной энталпии и моменте инерции  $dM = dJ = 0$ :  $TdS = -VdP$ .

Поэтому параметр процесса  $\mu$  и давление приобретают вид

$$\mu = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_M = \frac{1}{S} \left[ P \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_M - J \left( \frac{\partial \Omega}{\partial P} \right)_M + 2V \right], \quad (1.5)$$

$$P = \frac{3}{8} \left[ \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{\pi^3 J^4 + M^2 S^3} - 2\pi^2 J^2}{S^3} - \frac{1}{S} \right]. \quad (1.6)$$

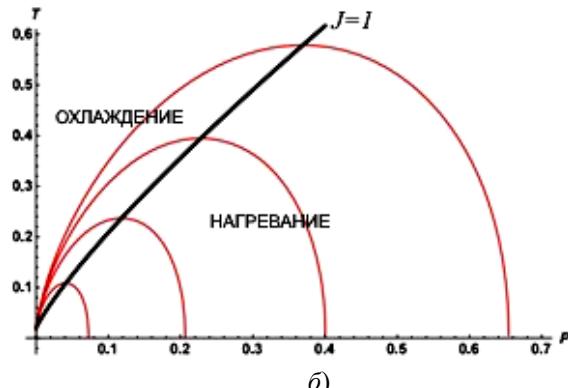
Совместное использование выражений (1.1)–(1.4), а также (1.5), (1.6) при выполнении условия (0.1) приводит к сложной связи

$$\begin{aligned} 256P_i^3 S^7 + 256P_i^2 S^6 + 84P_i S^5 + \\ + (9 - 384\pi^2 J^2 P_i^2) S^4 - 336\pi^2 J^2 P_i S^3 - \\ - 72\pi^2 J^2 S^2 - 72\pi^4 J^4 = 0, \end{aligned}$$

допускающей, однако, численный анализ, позволяющий получить графики кривых инверсии и изоэнталп, приведенные на рисунке 1.1 (а, б).

Следует отметить, что этот результат очень хорошо согласуется с работой [5].

Области охлаждения и нагревания несложно идентифицировать по знаку параметра  $\mu$  из (0.1), очевидному из графического поведения изоэнталп.



б)

## 2 Джоуль-томсоновское расширение заряженной АдС чёрной дыры

Пространственно-временной интервал в этом случае определяется как

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2,$$

где  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$  и функция  $f(r)$  имеет вид

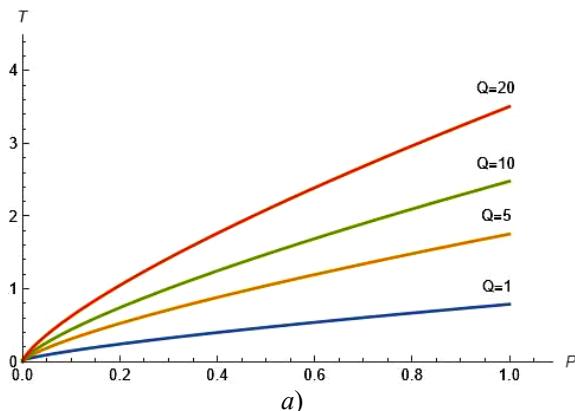
$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}.$$

Радиус горизонта событий  $r_+$  находится как наибольший корень уравнения  $f(r_+) = 0$  и выражается в виде

$$r_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+24P_iQ^2}}{P_i\pi} - \frac{1}{P_i\pi}}. \quad (2.1)$$

Масса чёрной дыры при этом оказывается равной

$$M = \frac{r_+}{2} \left( 1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2} \right), \quad (2.2)$$



и в данном случае также сопоставляется с энталпийей [9].

Подробный анализ процесса Джоуля – Томсона в заряженных АдС чёрных дырах проведен в работе [10], подтверждающей результаты, полученные в [6]. По этой причине здесь приведём лишь окончательное выражение для температуры инверсии, параметризованное зарядом

$$T_i = \frac{\sqrt{P_i}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left( 1 + 16\pi P_i Q^2 - \sqrt{1 + 24\pi P_i Q^2} \right)}{\left( -1 + \sqrt{1 + 24\pi P_i Q^2} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.3)$$

Используя (2.1) и (2.3), получаем окончательный вид кривых инверсии в  $TP$ -плоскости с зарядовой параметризацией. Семейство кривых инверсии приведено на рисунке 2.1 (a). Поведение изоэнталпий, следующее из (2.2) демонстрируется на рисунке 2.1 (б).

Из рисунка 2.1 (б) видно, что область положительного эффекта находится над кривыми инверсии для любого заряда  $Q$ , что также следует из вида изоэнталпий.

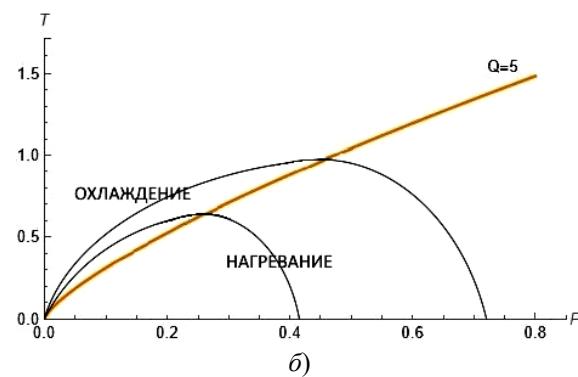


Рисунок 2.1 – а) семейство кривых инверсии для заряженной АдС чёрной дыры,

параметризованное зарядом  $Q$ ;

б) кривая инверсии для заряженной АдС чёрной дыры с  $Q = 5$ , областями положительного (охлаждение) и отрицательного (нагревание) эффекта Джоуля – Томсона и двумя изоэнталпиями

## 3 Джоуль-томсоновское расширение жидкости Редлиха – Квонга

Стандартное уравнение состояния Редлиха – Квонга, например [10], [11] может быть записано в виде

$$P = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{\sqrt{T}v(v+b)} \quad (3.1)$$

при условии введения параметра  $v = V/N$ , где  $V$  – объём,  $N$  – постоянное число частиц,  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $k_B$  – постоянная Больцмана, а параметры сил парного межмолекулярного отталкивания и притяжения заданы заменами  $b \Rightarrow b/N$ ,  $a \Rightarrow a/N^2$ .

Уравнение (3.1) и определение (0.1) дают явный вид параметра  $\lambda$

$$\lambda = -\frac{k_B Tb}{(v-b)^2} + \frac{5av + 3ab}{2\sqrt{T}v(v+b)^2}. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует выражение для  $T_i$ , которое совместно с (3.1) определяет систему уравнений для построения кривой инверсии

$$\begin{cases} T_i = \left[ \left( \frac{5av + 3ab}{2k_B bv} \right) \left( \frac{v-b}{v+b} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}}; \\ P = \frac{k_B T_i}{v-b} - \frac{a}{\sqrt{T_i}v(v+b)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

В свою очередь, формула (3.2) по очевидному асимптотическому поведению  $\lambda_{T \rightarrow \infty} < 0$  позволяет выделить области положительного и отрицательного эффекта – охлаждения и нагревания соответственно, что позволяет не

использовать явный вид графического поведения изоэнталлических кривых. Уравнения (18) также определяют физическую область некомплексных и неотрицательных температур в  $TP$ -плоскости. Вышесказанное в случае фиксации параметров  $k_B = a = b = 1$ , по аналогии с [5] и [6], проиллюстрировано на рисунке 3.1 (а).

Также следует отметить, что приведенная форма уравнения Редлиха – Квонга, учитывающая значения критических параметров

$$P_{kp} = \left( \frac{a^2 k_B \xi^7}{3b^5} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad T_{kp} = \left( \frac{3a \xi^2}{k_B b} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad V_{kp} = \frac{b}{\xi},$$

где  $\xi = \sqrt[3]{2} - 1 \approx 0,259921 \approx 0,260$ , ранее изучалась в рамках процесса Джоуля – Томсона в уже вышеупомянутой работе [11]. В этом случае

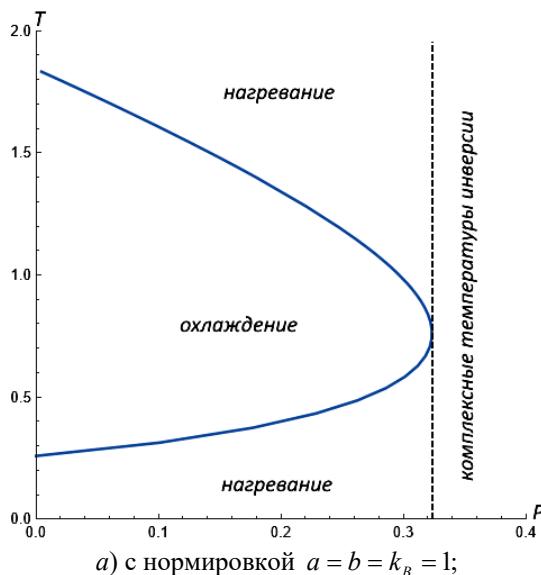


Рисунок 3.1 – Кривая инверсии для жидкости Редлиха – Квонга

#### 4 Джоуль-томсоновское расширение жидкости Берто

Уравнение состояния Берто [7] также может быть записано в виде с использованием  $v = V / N$

$$P = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{T v^2}. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) и определение (0.1) дают явный вид  $\lambda$

$$\lambda = \frac{3a}{T v^2} - \frac{k_B T b}{(v - b)^2}. \quad (4.2)$$

Тогда из (4.2) следует выражение для  $T_i$ , а из него находим  $v$ :

$$T_i = \sqrt{\frac{3a}{k_B b}} \frac{v - b}{v}, \quad v = \sqrt{\frac{3ab}{k_B b}} \left( \sqrt{\frac{3a}{k_B b}} - T_i \right)^{-1}.$$

Подстановка  $v$  в (4.1) приводит к уравнению

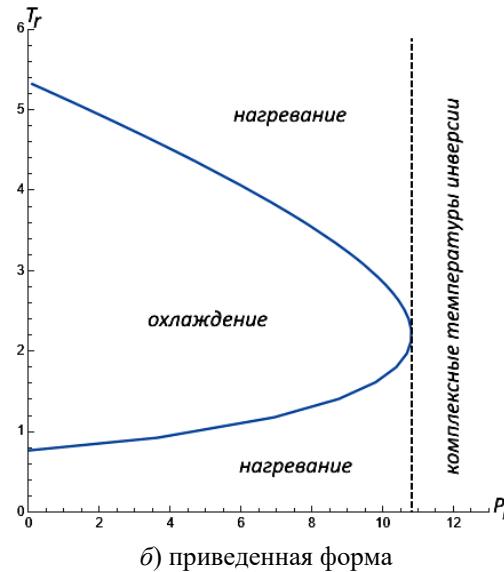
$$P = \sqrt{\frac{25ak_B}{3b^3}} - \frac{4k_B T_i}{3b} - \frac{a}{b^2 T_i},$$

система уравнений для инверсионной кривой имеет вид:

$$\begin{cases} T_{i,r} = \left[ \frac{(5V_r + 3\xi)}{6\xi^2 V_r} \left( \frac{V_r - \xi}{V_r + \xi} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}}; \\ P_r = \frac{3T_{i,r}}{V_r - \xi} - \frac{1}{\xi \sqrt{T_{i,r}} V_r (V_r + \xi)}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Приведенная кривая инверсии, следующая из (3.4) изображена на рисунке 3.1 (б).

Критерий выделения областей нагревания и охлаждения и в этом случае тот же  $\lambda_{r,T \rightarrow \infty} < 0$  и также не требует явного вида изоэнталлических кривых.



которое переписывается в удобном для анализа виде

$$T_i^2 + \left( \frac{3b}{4k_B} P - \sqrt{\frac{75a}{16k_B b}} \right) T_i + \frac{3a}{4k_B b} = 0. \quad (4.3)$$

Решения уравнения (4.3) задают вид верхней и нижней кривых инверсии

$$\begin{aligned} T_i^{upper/lower} = & \left( \sqrt{\frac{75a}{64k_B b}} - \frac{3b}{8k_B} P \right) \pm \\ & \pm \sqrt{\left( \sqrt{\frac{75a}{64k_B b}} - \frac{3b}{8k_B} P \right)^2 - \frac{3a}{4k_B b}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

а также позволяют выделить физическую область некомплексных и неотрицательных температур в  $TP$ -плоскости, что изображено на рисунке 4.1 (а). Физическое и максимальное значения давления следующие

$$0 \leq P \leq \sqrt{\frac{ak_B}{3b^3}}, \quad P_{max} = \sqrt{\frac{ak_B}{3b^3}}.$$

При этом предельные значения температур также становятся известны:

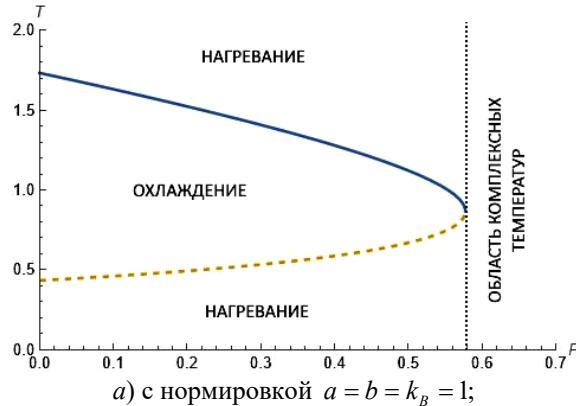
$$T_i(P_{\max}) = \sqrt{\frac{3a}{4k_B b}}, \quad T_i^{lower}(0) = \sqrt{\frac{3a}{16k_B b}},$$

$$T_i^{upper}(0) = \sqrt{\frac{3a}{k_B b}}.$$

Ранее приведенная форма уравнения Бертло, полученная с использованием критических параметров

$$P_{kp} = \left( \frac{ak_B}{216b^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad T_{kp} = \left( \frac{8a}{27k_B} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad V_{kp} = 3b,$$

изучалась в рамках процесса Джоуля – Томсона



в работе [12]. Полученная в этой работе приведенная кривая инверсии изображена на рисунке 4.1 (б).

В этом случае верхние и нижние кривые инверсии имеют вид

$$T_{i,r}^{upper/lower}(P_{i,r}) = \frac{3}{64} \left[ (30\sqrt{2} - P_{i,r}) \pm \sqrt{(30\sqrt{2} - P_{i,r})^2 - 1152} \right].$$

Идентификация на графиках областей нагревания и охлаждения в обоих случаях не требует явного вида изоэнталпических кривых, а очевидна из (4.2), так как  $\lambda_{T \rightarrow \infty} < 0$

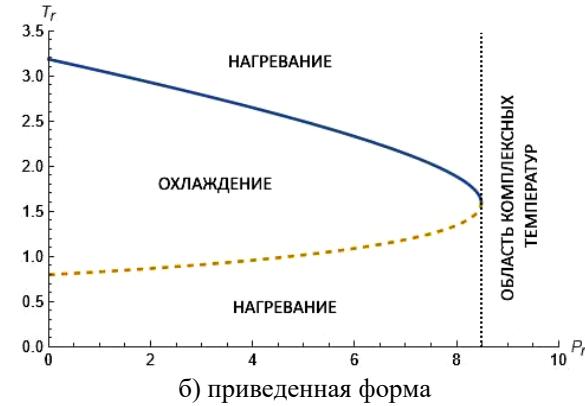


Рисунок 4.1 – Нижняя (пунктирная линия) и верхняя (непрерывная линия) кривые инверсии для жидкости Бертло

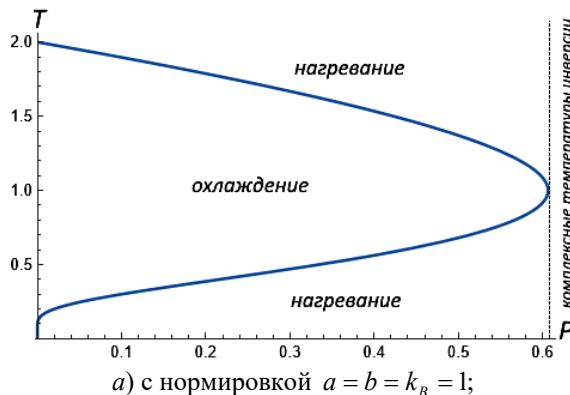
## 5 Джоуль-томсоновское расширение жидкости Дитеричи I

Уравнение состояния Дитеричи I записывается как

$$P = \frac{k_B T}{v - b} \exp\left(-\frac{a}{k_B T v}\right). \quad (5.1)$$

В этом случае уравнение (5.1) и определение (0.1) дают явный вид параметра процесса

$$\lambda = \frac{1}{v - b} \exp\left(-\frac{a}{k_B T v}\right) \left[ k_B T + \frac{2a}{v} - \frac{k_B T v}{v - b} \right],$$



который при условии инверсии  $\lambda = 0$  и  $T = T_i$  приводит к связи

$$k_B T_i + \frac{2a}{v} - \frac{k_B T_i v}{v - b} = 0. \quad (5.2)$$

Использование (5.1) и (5.2) позволяет получить формулу для кривой инверсии

$$P = \frac{1}{b} \left( \frac{2a}{b} - k_B T_i \right) \exp\left[\frac{1}{2} - \frac{a}{b k_B T_i}\right],$$

которая представлена на рисунке 5.1 (а) с указанием областей охлаждения и нагревания.

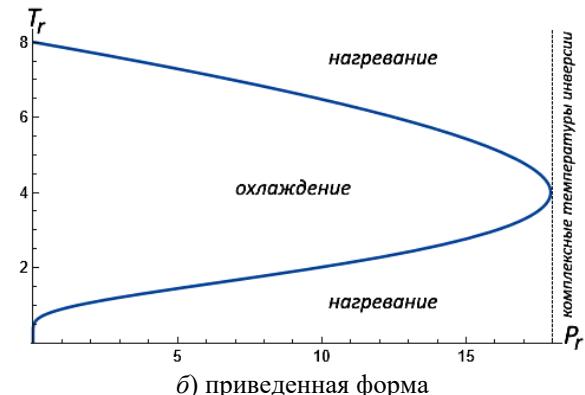


Рисунок 5.1 – Кривая инверсии для жидкости Дитеричи I

Ранее в работе [12] была получена кривая инверсии для уравнения Дитеричи I в терминах приведенных переменных, изображённая на рисунке 5.1 (б). В этом случае

$$P_r = (8 - T_r) \exp \left[ \frac{5}{2} - \frac{4}{T_i} \right].$$

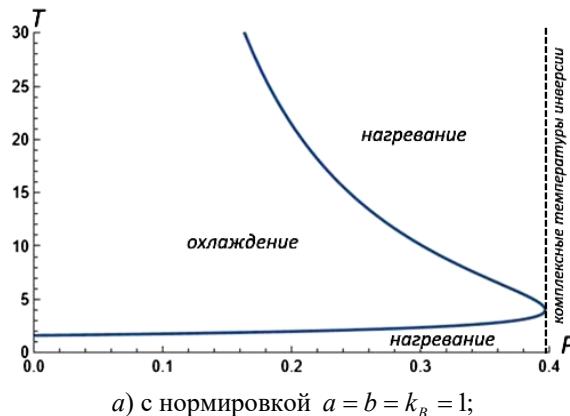
## 6 Джоуль-томсоновское расширение жидкости Дитеричи II

Уравнение состояния Дитеричи II представляется в виде

$$P = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^{5/3}}. \quad (6.1)$$

Уравнение состояния (6.1) и определение (0.1) в этом случае дают следующий вид параметра процесса

$$\lambda = \frac{5a}{3v^{5/3}} - \frac{k_B Tb}{(v - b)^2},$$



который при инверсии  $\lambda = 0$  и  $T = T_i$  приводит к связи

$$T_i = \frac{5a}{3k_B b} \frac{(v - b)^2}{v^{5/3}}; \\ T_i = \left( P + \frac{a}{v^{5/3}} \right) (v - b) \frac{1}{k_B}. \quad (6.2)$$

Пара уравнения из (6.2) не позволяет получить явное аналитическое выражение  $T_i = T_i(P)$  для кривой инверсии, но ее графический вид, представленный на рисунке 6.1 (а), легко определить численными методами. В работе [13] была получена инверсионная кривая для уравнения Дитеричи II в терминах приведенных переменных, изображённая на рисунке 6.1 (б). В этом случае система уравнений для кривой инверсии имеет следующий вид:

$$T_{i,r} = \frac{4(4V_r - 1)^2}{9V_r^{5/3}}; \quad T_{i,r} = \frac{1}{15} \left( P_r + \frac{4}{V_r^{5/3}} \right) (4V_r - 1).$$

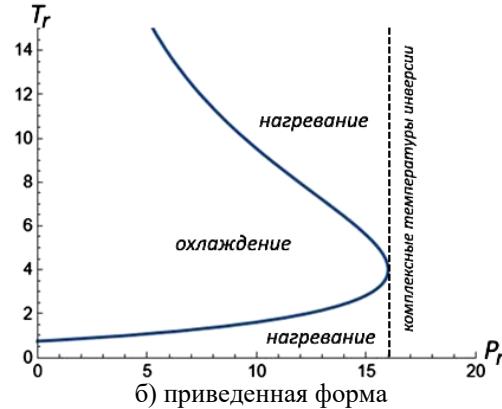


Рисунок 6.1 – Кривая инверсии для жидкости Дитеричи II

## 7 Сходства и различия

Предполагая физическую тождественность  $TP$ -плоскостей для рассматриваемых макросистем при условии использования рациональной системы единиц и нормировки  $a = b = k_B = 1$ , укажем на их выявленные сходства и различия при джоуль-томсоновском расширении.

*Сходства:*

1. Термодинамические уравнения состояния Керровских и заряженных чёрных дыр, как и двухпараметрических неидеальных жидкостей, допускают физически корректный анализ в рамках джоуль-томсоновского расширения, тем самым, делая возможной реализацию процесса в данных макросистемах.

2. Для всех рассмотренных макросистем кривые инверсии знака дифференциального эффекта Джоуля – Томсона построены в  $TP$ -плоскости.

3. Для всех рассмотренных макросистем определены и указаны на графиках области

положительного и отрицательного эффекта на основе поведения параметров процесса  $\lambda$  или  $\mu$ .

4. Поведение кривых инверсии чёрных дыр допускает сравнение с поведением только «нижних» кривых инверсии неидеальных газов.

5. Влияние параметризации зарядом или моментом инерции на вид кривых инверсии АдС чёрных дыр позволяет сделать вывод о наличии некоторого заряда или момента инерции, при котором их кривые инверсии имеют точку касания  $A$  с кривыми инверсии жидкостей. Так, например, в работе [10] было показано, что для заряженных АдС чёрных дыр и жидкости Редлиха – Квонга данной ситуации соответствует заряд  $Q = 2,75$ . Координаты точки касания:  $P_A = 0,28$ ;  $T_A = 0,43$ .

6. Так как область положительного эффекта у чёрных дыр располагается над кривой инверсии, то при прохождении кривой ниже точки касания эта область полностью содержит область положительного эффекта неидеальной жидкости, что позволяет в этом случае использовать

«жидкостную» терминологию применительно к чёрным дырам.

7. Наличие точки касания с нижней стороны кривой инверсии говорит о правомерности использования термина «жидкость» для вещества в модели Редлиха – Квонга и других, так как именно нижняя часть соответствует жидкой фазе состояния.

#### Различия:

1. Область положительного эффекта чёрных дыр не имеет ограничения сверху.

2. У чёрных дыр в *TP*-плоскости не возникает нефизическая область комплексных температур.

3. Область положительного эффекта для неидеальных жидкостей в *TP*-плоскости фиксирована, в то время как область положительного эффекта для чёрных дыр увеличивается с уменьшением заряда или момента инерции.

#### Заключение

В работе рассмотрено джоуль-томсоновское расширение Керровской и заряженной чёрных дыр в АдС-пространстве и ряда двухпараметрических неидеальных жидкостей. Масса чёрной дыры в АдС пространстве отождествлялась с энталпией и считалась постоянной. Во всех случаях получены кривые инверсии знака дифференциального эффекта Джоуля – Томсона и определены области охлаждения и нагревания, то есть показано, что на уровне современных термодинамических представлений в рассматриваемых макросистемах реализация процесса Джоуля – Томсона физически допустима. Проведен возможный сравнительный анализ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Bekenstein, J.D.* Black holes and the second law / J.D. Bekenstein // Lett. Nuovo Cimento. – 1972. – Vol. 4. – P. 737–740.
2. *Hawking, S.W.* Black hole explosions? / S.W. Hawking // Nature. – 1974. – Vol. 248. – P. 30–31.
3. *Hawking, S.W.* Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space / S.W. Hawking, D.N. Page // Commun. Math. Phys. – 1983. – Vol. 87. – P. 577–588.
4. *Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography* / A. Chamblin, R. Emparan, C.V. Johnson, R.C. Myers // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 60. – P. 064018.

5. *Ökcü, Ö.* Joule – Thomson expansion of Kerr-AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydiner // Eur. Phys. J. C. – 2018. – Vol. 78. – Art. № 123.

6. *Ökcü, Ö.* Joule – Thomson expansion of the charged AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydiner // Eur. Phys. J. C. – 2017. – Vol. 77. – Art. № 24.

7. *Румер, Ю.Б.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: НГУ, 2000. – 608 с.

8. *Hendricks, R.C.* Joule – Thomson Inversion Curves and Related Coefficients for Several Simple Fluids / R.C. Hendricks, I.C. Peller, A.K. Baron // NASA Technical Note TN D-6807. – NASA, 1972. – 59 p.

9. *Kastor, D.* Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes / D. Kastor, S. Ray, J. Traschen // Class. Quantum Gravity. – 2009. – Vol. 26. – P. 195011.

10. *Новикова, О.В.* Джоуль-томсоновское расширение: жидкость Редлиха – Квонга и заряженная АдС чёрная дыра / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 30–34.

11. *Дей, Е.А.* Расчет параметров изоэнтальпического охлаждения газов Редлиха – Квонга / Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 38–42.

12. *Тюменков, Г.Ю.* Об эффекте Джоуля – Томсона в газах Бертло и Дитеричи-I / Г.Ю. Тюменков, С.В. Станкевич, Т.В. Скачёк // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 4 (55). – С. 184–187.

13. *Тюменков, Г.Ю.* О некоторых параметрах и изоэнтальпическом охлаждении газа Дитеричи II / Г.Ю. Тюменков, Е.А. Дей, О.В. Тарнавская // Чрезвычайные ситуации: Образование и наука. – 2011. – Т. 6, № 1. – Р. 135–140.

Поступила в редакцию 01.09.2025.

#### Информация об авторах

Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.  
Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент