УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_62
EDN: RJSZOU

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ФАКТОРГРУППЫ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУПП СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

POLYADIC QUOTIENT GROUPS OF POLYADIC GROUPS OF A SPECIAL FORM. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье продолжается изучение l-арных факторгрупп полиадических групп специального вида.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *полуинвариантная l-арная подгруппа*, *n-полуинвариантная l-арная подгруппа*, *факторгруппа*, *конгруэнция*, *смежный класс*.

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 62–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_62. – EDN: RJSZOU

Abstract. The study on the l-ary quotient groups of polyadic groups of a special form is carried on.

Keywords: *polyadic operation*, *semiinvariant l-ary subgroup*, *n-semiinvariant l-ary subgroup*, *quotient group*, *congruence*, *coset*.

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Polyadic quotient groups of polyadic groups of a special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 62–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_62 (in Russian). – EDN: RJSZOU

Введение

Данная статья, посвящённая изучению l-арных факторгрупп l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ специального вида по её полуинвариантным l-арным подгруппам, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на теорему 2.1 означает, что имеется в виду теорема 2.1 из раздела 2 в [1]. Одной из основных целей данной статьи является доказательство того, что в случае цикличности n-арной факторгруппы $< A / B, \eta >$ любой её смежный класс может быть l-арной подгруппой l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

3 Вспомогательные результаты

Сформулируем несколько утверждений, используемых при получении основного результата.

***Лемма* 3.1**. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа*, $< B, \eta >$ *– её полуинвариантная n-арная подгруппа. Тогда*

$$\overline{\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})} = \eta(\overline{a}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Доказательство. Используя полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ и определение косого элемента, получим

$$\eta(\eta(\overline{a}\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\underbrace{\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\ldots\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})}_{n-1}) =$$

$$= \eta(\eta(\overline{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-1})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

то есть

$$\eta(\eta(\overline{a}\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\underbrace{\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\ldots\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})}_{n-1}) =$$

$$= \eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Следовательно, доказываемое равенство верно. □

***Лемма* 3.2**. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа*, $< B, \eta >$ *– её полуинвариантная n-арная подгруппа. Тогда*

$$(\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}))^{[m]} = \eta(a^{[m]}\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$$

для любого целого m.

Доказательство. Для $n = 2$ доказываемое равенство верно. Поэтому считаем $n \geq 3$.

Используя определение полиадической степени для случая $m = 0$, получим

$$(\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1}))^{[0]} = \eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = \eta(a^{[0]}\underbrace{B\dots B}_{n-1}).$$

Если $m > 0$, то, используя определение полиадической степени и полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, получим

$$(\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1}))^{[m]} = \eta(\underbrace{\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})}_{m(n-1)+1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{a\underbrace{B\dots B}_{n-1}\dots a\underbrace{B\dots B}_{n-1}}_{m(n-1)+1}) = \eta(\underbrace{a\ \dots\ a}_{m(n-1)+1}\underbrace{B\dots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{a\ \dots\ a}_{m(n-1)+1})\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = \eta(a^{[m]}\underbrace{B\dots B}_{n-1}),$$

то есть для $m > 0$ доказываемое равенство верно.

Если $m < 0$, то, снова используя определение полиадической степени, полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, а также лемму 3.1, получим

$$(\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1}))^{[m]} = \eta(\underbrace{\overline{\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})}\dots\overline{\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})}}_{-2m}$$

$$\underbrace{\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})}_{-m(n-3)+1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{\eta(\overline{a}\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(\overline{a}\underbrace{B\dots B}_{n-1})}_{-2m}$$

$$\underbrace{\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})}_{-m(n-3)+1}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{\overline{a}\dots\overline{a}}_{-2m}\underbrace{a\ \dots\ a}_{-m(n-3)+1})\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = \eta(a^{[m]}\underbrace{B\dots B}_{n-1}),$$

то есть для $m < 0$ доказываемое равенство верно. □

***Замечание* 3.1**. Так как

$$\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1}))^{[-1]} = \overline{\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1})},\ \ a^{[-1]} = \overline{a},$$

то лемма 3.1 содержится в лемме 3.2 при $m = -1$.

***Лемма* 3.3**. *Пусть* $< A, \eta >$ – n-*арная группа*, $< B, \eta >$ – *её* n-*арная подгруппа*, $d_1, \dots, d_{l-1} \in A$. *Тогда*:

1) *если существуют элементы* $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $d_1 \dots d_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста, то*

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}B) = B, \qquad (3.1)$$

$$\eta(Bd_1 \dots d_{l-1}) = B; \qquad (3.2)$$

2) *если верно равенство* (3.1) *или равенство* (3.2), *то существуют элементы* $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $d_1 \dots d_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста*.

Доказательство. 1) Так как последовательности $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, то

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}b) = \eta(b_1 \dots b_{n-1}b)$$

для любого $b \in B$, откуда следует

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}B) \subseteq B.$$

Так как для любого $b \in B$ уравнение

$$b = \eta(b_1 \dots b_{n-1}x)$$

имеет решение $x = c \in B$, то

$$b = \eta(b_1 \dots b_{n-1}c),$$

откуда и из эквивалентности в смысле Поста последовательностей $d_1 \dots d_{n-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ следует

$$b = \eta(d_1 \dots d_{l-1}c).$$

Следовательно,

$$B \subseteq \eta(d_1 \dots d_{l-1}B).$$

Из доказанных включений следует требуемое равенство.

2) Если верно равенство (3.1), то для любого $c \in B$ имеем

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}c) = b \in B. \qquad (3.3)$$

А так как $< B, \eta >$ – n-арная группа, то для $c, b \in B$, в ней разрешимо уравнение

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1}c) = b.$$

Следовательно, найдутся такие $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, что

$$\eta(b_1 \dots b_{n-1}c) = b. \qquad (3.4)$$

Из равенства правых частей в (3.3) и (3.4) следует равенство

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}c) = \eta(b_1 \dots b_{n-1}c),$$

что означает эквивалентнсть в смысле Поста последовательностей $d_1 \dots d_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$.

Для равенства (3.2) доказательство проводится аналогично. □

***Следствие* 3.1**. *Пусть* $< A, \eta >$ – n-*арная группа*, $< B, \eta >$ – *её* n-*арная подгруппа*, $d \in A$. *Тогда*:

1) *если существуют элементы* $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d\dots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста, то*

$$\eta(\underbrace{d\dots d}_{l-1}B) = B, \qquad (3.5)$$

$$\eta(B\underbrace{d\dots d}_{l-1}) = B; \qquad (3.6)$$

2) *если верно равенство* (3.5) *или равенство* (3.6), *то существуют элементы* $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d\dots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста*.

***Лемма* 3.4**. *Пусть* $< A, \eta >$ – n-*арная группа*, $< B, \eta >$ – *её* n-*арная подгруппа*, *существуют натуральное* i *и элементы* $a \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{a\ \dots\ a}_{i(n-1)}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста. Тогда последовательность* $\underbrace{\overline{a}\ \dots\ \overline{a}}_{i(n-1)}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $c_1 \dots c_{n-1}$ *для некоторых элементов* $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$.

Доказательство. Так как последовательность $\overline{a}\underbrace{a\dots a}_{n-2}$ – нейтральная, то нейтральной является и последовательность

$$\underbrace{\overline{a}\,\underbrace{a \ldots a}_{n-2} \ldots \overline{a}\,\underbrace{a \ldots a}_{n-2}}_{i(n-1)},$$

которая в силу перестановочности любого элемента со своим косым, эквивалентна в смысле Поста последовательности

$$\underbrace{\overline{a} \ldots \overline{a}}_{i(n-1)}\ \underbrace{\underbrace{a \ldots a}_{i(n-1)} \ldots \underbrace{a \ldots a}_{i(n-1)}}_{n-2},$$

также являющейся нейтральной. Заменив в этой последовательности каждую последовательность $\underbrace{a \ldots a}_{i(n-1)}$ эквивалентной в смысле Поста последовательностью $b_1 \ldots b_{n-1}$, получим нейтральную последовательность

$$\underbrace{\overline{a} \ldots \overline{a}}_{i(n-1)}\ \underbrace{b_1 \ldots b_{n-1} \ldots b_1 \ldots b_{n-1}}_{n-2}, \quad (3.7)$$

которая эквивалентна в смысле Поста последовательности

$$\underbrace{\overline{a} \ldots \overline{a}}_{i(n-1)}\, b_1 \ldots b_{n-2}c, \quad (3.8)$$

где

$$c = \eta(\,b_{n-1}\underbrace{b_1 \ldots b_{n-1} \ldots b_1 \ldots b_{n-1}}_{n-3}) \in B.$$

Из нейтральности последовательности (3.7), а значит и последовательности (3.8), следует

$$\eta(\underbrace{\overline{a} \ldots \overline{a}}_{i(n-1)}\, b_1 \ldots b_{n-2}cb) = b$$

для любого $b \in B$, откуда

$$\eta(\underbrace{\overline{a} \ldots \overline{a}}_{i(n-1)}\, d) = b, \quad (3.9)$$

где

$$d = \eta(b_1 \ldots b_{n-2}cb) \in B.$$

Так как $< B, \eta >$ – n-арная группа, то для $b, d \in B$ в ней разрешимо уравнение

$$\eta(x_1 \ldots x_{n-1}d) = b.$$

Следовательно, найдутся такие $c_1, \ldots, c_{n-1} \in B$, что

$$\eta(c_1 \ldots c_{n-1}d) = b. \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) следует равенство

$$\eta(\underbrace{\overline{a} \ldots \overline{a}}_{i(n-1)}\, d) = \eta(c_1 \ldots c_{n-1}d),$$

что означает эквивалентнсть в смысле Поста последовательностей $\underbrace{\overline{a} \ldots \overline{a}}_{i(n-1)}$ и $c_1 \ldots c_{n-1}$. □

Полагая в лемме 3.4 $i = 1$, получим

***Следствие* 3.2**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа*, $< B, \eta >$ – *её n-арная подгруппа, существуют элементы* $a \in A$, $b_1,\ldots,b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{a \ \ldots \ a}_{n-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста. Тогда последовательность* $\underbrace{\overline{a} \ \ldots \ \overline{a}}_{n-1}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $c_1 \ldots c_{n-1}$ *для некоторых* $c_1, \ldots, c_{n-1} \in B$.

Нам понадобится также следующая

***Теорема* 3.1**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа полуабелевой n-арной группы* $< A, \eta >$, *отличная от неё; существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \ldots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста; подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. *Тогда справедливы все утверждения теоремы* 2.1. *Кроме того, универсальная алгебра* $< H^k, \eta_{n,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной, но не n-полуинвариантной l-арной подгруппой в полуабелевой l-арной группе* $< A^k, \eta_{n,\sigma,k} >$, *которая не является n-полуабелевой.*

Доказательство. 1) В полуабелевой n-арной группе $< A, \eta >$ n-арная подгруппа $< B, \eta >$ является полуинвариантной. Кроме того, по условию теоремы, при $i = 2$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)} = \sigma^{n-1}$ не является тождественной. Таким образом, выполняются все условия теоремы 2.1. Следовательно, справедливы все утверждения этой теоремы. Осталось применить теорему 4.5 из [2], по которой $< A^k, \eta_{n,\sigma,k} >$ – полуабелева l-арная группа, не являющаяся n-полуабелевой. □

***Замечание* 3.2**. Если σ – нетождественная подстановка, для которой подстановка σ^n является тождественной, то $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, где $l = n(n-1) + 1$. Поэтому в теореме 3.1 в качестве подстановки σ можно выбрать нетождественную подстановку с условием $\sigma^{n+1} = \sigma$ и положить $l = n(n-1) + 1$.

4 Основные результаты

***Теорема* 4.1**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *отличная от неё; n-арная факторгруппа* $< A / B, \eta >$ *является циклической, порождаемой смежным классом* $\eta(a\underbrace{B \ldots B}_{n-1})$; *последовательность* $\underbrace{a \ldots a}_{l-1}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *для некоторых* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$; *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *для любого смежного класса H n-арной факторгруппы* $< A / B, \eta >$ *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $\eta_{s,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$;

2) *если для некоторого* $i = 2, \ldots, s$ *подстановка* $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ *не является тождественной, то l-арная подгруппа* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Доказательство. 1) Так как n-арная факторгруппа $< A / B, \eta >$ является циклической, порождаемой элементом $\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$, то любой элемент H этой n-арной факторгруппы совпадает с некоторой степенью порождающего элемента. Будем для определенности считать

$$H = (\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1}))^{[r]}$$

для некоторого целого r. По лемме 3.2

$$H = \eta(a^{[r]}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}).$$

Пусть $r \geq 0$. Так как последовательность $\underbrace{a\ldots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $b_1 \ldots b_{n-1}$ для некоторых элементов $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, то

$$\eta(\eta(\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{l})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(a^{[r]}\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{l-1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(a^{[r]}\underbrace{\eta(\underbrace{a\ \ldots\ a}_{r(n-1)+1})\ldots\eta(\underbrace{a\ \ldots\ a}_{r(n-1)+1})}_{l-1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(a^{[r]}\underbrace{\underbrace{a\ \ldots\ a}_{l-1}\ldots\underbrace{a\ \ldots\ a}_{l-1}}_{r(n-1)+1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(a^{[r]}\underbrace{b_1\ldots b_{n-1}\ldots b_1\ldots b_{n-1}}_{r(n-1)+1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(a^{[r]}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

то есть

$$\eta(\eta(\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{l})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(a^{[r]}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}). \quad (4.1)$$

Если теперь $r < 0$, то по лемме 3.4 последовательность

$$\underbrace{\overline{a}\ \ldots\ \overline{a}}_{l-1} = \underbrace{a\ \ldots\ a}_{s(n-1)}$$

эквивалентна в смысле Поста последовательности $c_1 \ldots c_{n-1}$ для некоторых $c_1, \ldots, c_{n-1} \in B$. А так как, кроме того, последовательность $\underbrace{a\ldots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $b_1 \ldots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, то

$$\eta(\eta(\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{l})\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(a^{[r]}\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{l-1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(a^{[r]}\underbrace{\eta(\underbrace{\overline{a}\ldots\overline{a}}_{-2r}\underbrace{a\ \ldots\ a}_{-r(n-3)+1})\ldots\eta(\underbrace{\overline{a}\ldots\overline{a}}_{-2r}\underbrace{a\ \ldots\ a}_{-r(n-3)+1})}_{l-1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(a^{[r]}\underbrace{\underbrace{\overline{a}\ldots\overline{a}}_{l-1}\ldots\underbrace{\overline{a}\ldots\overline{a}}_{l-1}}_{-2r}\underbrace{\underbrace{a\ldots a}_{l-1}\ldots\underbrace{a\ldots a}_{l-1}}_{-r(n-3)+1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(a^{[r]}\underbrace{c_1\ldots c_{n-1}\ldots c_1\ldots c_{n-1}}_{-2r}$$

$$\underbrace{b_1\ldots b_{n-1}\ldots b_1\ldots b_{n-1}}_{-r(n-3)+1}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \eta(a^{[r]}\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

то есть и для $r < 0$ верно равенство (4.1), следствием которого является следующее равенство

$$\eta(\overline{a^{[r]}}\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{n-3}\ \eta(\eta(\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{l})\underbrace{B\ldots B}_{n-1})B) =$$

$$= \eta(\overline{a^{[r]}}\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{n-3}\ \eta(a^{[r]}\underbrace{B\ldots B}_{n-1})B).$$

Из этого равенства в силу нейтральности последовательности $\overline{a^{[r]}}\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{n-2}$ следует равенство

$$\eta(\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{l-1}B) = B.$$

Поэтому, согласно утверждению 2) следствия 3.1, последовательность $\underbrace{a^{[r]}\ldots a^{[r]}}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $u_1 \ldots u_{n-1}$ для некоторых $u_1, \ldots, u_{n-1} \in B$. Осталось применить утверждение 1) теоремы 2.1.

2) Применяется утверждение 4) теоремы 2.1.□

Полагая в теореме 4.1 $i = 2$, получим следующий результат.

***Теорема* 4.2**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *отличная от неё*; *n-арная факторгруппа* $< A / B, \eta >$ *является циклической*, *порождаемой смежным классом* $\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$; *последовательность* $\underbrace{a\ldots a}_{l-1}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *для некоторых* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$; *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *для любого смежного класса H n-арной факторгруппы* $< A / B, \eta >$ *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $\eta_{s,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$;

2) *если подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной*, *то l-арная подгруппа* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуинвариантной в* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.1, при этом вместо теоремы 2.1 применяется теорема 4.1.

***Теорема* 4.3**. *Пусть* $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа полуабелевой n-арной группы* $< A, \eta >$, *отличная от неё*; *n-арная факторгруппа* $< A / B, \eta >$ *является циклической*, *порождаемой смежным классом* $\eta(a\underbrace{B\ldots B}_{n-1})$; *последовательность* $\underbrace{a\ldots a}_{l-1}$ *эквивалентна в смысле Поста последовательности* $b_1 \ldots b_{n-1}$ *для некоторых* $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$; *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. *Тогда справедливы все утверждения теоремы* 4.1. *Кроме того*, *универсальная алгебра* $< H^k, \eta_{n,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной*, *но не n-полуинвариантной l-арной подгруппой в полуабелевой l-арной группе*

$< A^k, \eta_{n,\sigma,k} >$, *которая не является n-полуабелевой.*

***Замечание* 4.1**. В теореме 4.3, как и в теореме 3.1, в качестве подстановки σ можно выбрать нетождественную подстановку из замечания 3.2.

Бинарный случай $(n = 2)$ Сформулируем следствия из теорем 4.1–4.3 для $n = 2$.

***Теорема* 4.4**. *Пусть B – нормальная подгруппа группы A, отличная от неё; факторгруппа* A / B *является циклической, порождаемой смежным классом aB;* $a^{l-1} \in B$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *для любого смежного класса H факторгруппы* A / B *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $[\ ]_{l,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$;

2) *если для некоторого* $i = 2, \ldots, l - 1$ *подстановка* σ^{i-1} *– не является тождественной, то l-арная подгруппа* $< H^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

***Теорема* 4.5**. *Пусть B – нормальная подгруппа группы A, отличная от неё; факторгруппа* A / B *является циклической, порождаемой смежным классом aB;* $a^{l-1} \in B$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *для любого смежного класса H факторгруппы* A / B *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $[\ ]_{l,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$;

2) *если подстановка* σ *не является тождественной, то l-арная подгруппта* $< H^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является инвариантной в* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

***Теорема* 4.6**. *Пусть B – подгруппа абелевой группы A, отличная от неё; факторгруппа* A / B *является циклической, порождаемой смежным классом aB;* $a^{l-1} \in B$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^2 \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого смежного класса H факторгруппы* A / B *декартова степень* H^k *замкнута относительно l-арной операции* $[\ ]_{l,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной, но неинвариантной l-арной подгруппой в полуабелевой l-арной группе* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *которая не является абелевой.*

Полагая в теореме 4.6 $l = 3$, получим

***Следствие* 4.1**. *Пусть для нетождественной подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^2 *является тождественной, B – подгруппа абелевой группы A, отличная от неё; факторгруппа* A / B *является циклической, порождаемой смежным классом aB;* $a^2 \in B$. *Тогда для любого смежного класса H факторгруппы* A / B *декартова степень* H^k *замкнута относительно тернарной операции* $[\ ]_{3,\sigma,k}$, *а универсальная алгебра* $< H^k, [\ ]_{3,\sigma,k} >$ *является полуинвариантной, но неинвариантной тернарной подгруппой в полуабелевой тернарной группе* $< A^k, [\ ]_{3,\sigma,k} >$, *которая не является абелевой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 84–89.

2. *Гальмак, А.М.* Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 70–75.

Поступила в редакцию 09.09.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор