МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_67
EDN: TKJHKY

О КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ, ФАКТОРИЗУЕМОЙ *B*-ГРУППОЙ И *Z*-ГРУППОЙ

В.Н. Князина

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON A FINITE GROUP FACTORIZED BY A *B*-GROUP AND A *Z*-GROUP

V.N. Kniahina

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Конечная ненильпотентная группа называется *B*-группой, если в ее фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Конечная группа, у которой все силовские подгруппы циклические, называется *z*-группой. Исследуется конечная группа *G*, представимая в виде произведения ее *B*-подгруппы и *z*-подгруппы взаимно простых порядков. Устанавливается, что если группа *G* разрешима, то ее второй коммутант нильпотентен, производная длина ее фактор-группы по подгруппе Фраттини не превышает трех, а *p*-длина не больше двух. Если группа *G* простая, то $G \cong PSL_2(p^m)$ и все значения для p^m указаны.

Ключевые слова: *конечная группа*, *B-группа*, *z-группа*, *p-длина*, *производная длина*, *факторизуемая группа*.

Для цитирования: *Князина*, *В.Н.* О конечной группе, факторизуемой *B*-группой и *z*-группой / В.Н. Князина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_67. – EDN: TKJHKY

Abstract. A finite non-nilpotent group is called a *B*-group if all proper subgroups of its quotient group by the Frattini subgroup are primary. A finite group whose Sylow subgroups are all cyclic is called a *z*-group. We study a finite group *G* that can be represented as a product of its *B*-subgroup and *z*-subgroup of coprime orders. For a solvable groups *G*, we prove that the second derived subgroup is nilpotent, the derivative length of the quotient group by the Frattini subgroup does not exceed three, and the *p*-length is at most two. If *G* is a simple group, then *G* is isomorphic to $\mathrm{PSL}_2(p^m)$, and all possible values of p^m are determined.

Keywords: *finite group*, *B-group*, *z-group*, *p-length*, *derivative length*, *factorizable group*.

For citation: *Kniahina*, *V.N.* On a finite group factorized by a *B*-group and a *z*-group / V.N. Kniahina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_67 (in Russian). – EDN: TKJHKY

Введение

Конечная группа, у которой все силовские подгруппы циклические, называется *z*-группой. *B*-группа – это конечная ненильпотентная группа, у которой в фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Группа Шмидта также является *B*-группой. Обе эти группы бипримарны, одна из силовских подгрупп в этих группах – нормальная, а другая – циклическая, см. лемму 2.2 [1]. Фактор-группа нормальной силовской подгруппы по подгруппе Фраттини – главный фактор и в группе Шмидта, и в *B*-группе. Однако между *B*-группами и группами Шмидта есть и различия. Так, если в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, то в *B*-группе это свойство нарушается.

В работе [1] установлены основные свойства *B*-групп и изучена группа, факторизуемая *B*-группой и примарной группой. В частности, доказано, что если конечная группа $G = HK$ представима в виде произведения *B*-подгруппы *H* и примарной подгруппы *K*, и если порядок ненормальной силовской подгруппы в *H* не равен 3 и 7, то группа *G* разрешима. В работе [2] мы установили, что конечная *p*-разрешимая группа, представимая в виде произведения двух своих подгрупп Шмидта, имеет *p*-длину не более 2. Эта оценка точная. Примером является симметрическая группа S_4. В работе [3] была исследована конечная группа $G = HK$, факторизуемая двумя *B*-подгруппами *H* и *K*. Такая группа может быть простой, например, знакопеременная группа A_5 степени 5, которая факторизуется двумя своими *B*-подгруппами $H \cong A_4$ и $K \cong [C_5]C_2$. В случае, если конечная группа $G = HK$ *p*-разрешима, установлены достаточные условия, при которых *p*-длина группы *G* равна единице. Если *B*-подгруппы *H* и *K* сверхразрешимы, то конечная группа $G = HK$ разрешима. Кроме того, если группа *G* нечетного порядка, то *G* сверхразрешима.

Конечная факторизуемая группа, у которой оба сомножителя являются z-группами, исследовалась в [4]–[6]. В работе [7] было доказано, что конечная разрешимая группа, которая представима в виде произведения холловой z-подгруппы и группы Шмидта, содержит нильпотентную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой метабелева.

В настоящей работе исследуются свойства конечной группы $G = HK$, представимой в виде произведения нильпотентной или B-подгруппы H и z-подгруппы K взаимно простых порядков. Устанавливается, что если группа G разрешима, то ее второй коммутант нильпотентен, производная длина ее фактор-группы по подгруппе Фраттини не превышает трех, p-длина группы G не превышает 2 для каждого $p \in \pi(H)$ и равна 1 для каждого $p \in \pi(K)$. Если группа G простая, то $G \cong PSL_2(p^m)$ и все значения для p^m указаны.

1 Вспомогательные результаты

В статье рассматриваются только конечные группы. Мы используем стандартные обозначения, определения, а также терминологию из [8], [9].

Приведем некоторые наиболее часто используемые обозначения. Центр, коммутант, подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются соответственно через $Z(G)$, G', $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $Y \le X$ $(Y < X)$ используется для обозначения подгруппы (собственной подгруппы) группы X, а $O_p(X)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы X.

Для определенных групп будем использовать следующие обозначения:

Z_m – циклическая группа порядка M,

E_{p^m} – элементарная абелева группа порядка p^m,

D_{2n} – диэдральная группа порядка $2n$,

S_n и A_n – симметрическая и знакопеременная группы степени N,

$\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп,

$\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп,

$\mathfrak{NA}^2 = \mathfrak{NAA}$ – формационное произведение.

Полупрямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A мы будем записывать двумя способами: $[A]B$ либо $A \rtimes B$ в связи тем, что в цитируемых источниках оно обозначается по-разному. Группа G с нормальной силовской p-подгруппой G_p называется p-замкнутой. Если в группе G есть нормальная подгруппа $G_{p'}$ такая, что $G = [G_{p'}]G_p$, то группа G называется p-нильпотентной.

Для B-группы с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской q-подгруппой будем использовать обозначение $B_{\langle p,q\rangle}$.

Приведем свойства B-групп, которые мы будем использовать при доказательстве теоремы.

Лемма 1.1 [1, леммы 2.2 и 2.4]. *Пусть B – $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, p и q – ее силовские p- и q-подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $B = [P]Q$;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ *и* $P/\Phi(P)$ – *главный фактор группы B порядка* p^m, *где M – показатель числа p по модулю q*;

(3) $Q = \langle y\rangle$ – *циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(B)$. *Кроме того,* $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q\rangle$ *и* $Z(B) \le \Phi(B)$;

(4) *Если H – нормальная в B подгруппа и* $H \ne B$, *то H нильпотентна*;

(5) *Если M – максимальная в B подгруппа*, то *либо M нормальна в B и* $M = P \times \langle y^q\rangle$, *либо* $M = [\Phi(P)]Q^x$ *для некоторого* $x \in B$.

(6) *Если N – нормальная подгруппа* $B_{\langle p,q\rangle}$*-группы B,* $N \ne B$, *то*

(6.1) *силовская p-подгруппа* P_1 *из N либо совпадает с силовской p-подгруппой группы B, либо* $P_1 \le \Phi(B) \cap P = \Phi(P)$;

(6.2) *силовская q-подгруппа* Q_1 *из N содержится в* $\langle y^q\rangle \le Z(B)$, *где* $\langle y\rangle$ *– силовская q-подгруппа группы B*;

(6.3) *либо* $P \le N$, *либо* $N \le \Phi(B)$;

(6.4) *фактор-группа* B/N *либо является* $B_{\langle p,q\rangle}$*-группой, либо циклической q-группой.*

Лемма 1.2 [7, лемма 2.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда произведение $\mathfrak{NF}$ является насыщенной формацией.*

Лемма 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N группы G. Тогда G – примитивная группа.*

Доказательство. Утверждение легко выводится из соответствующих определений. □

Если H – подгруппа группы G, то пересечение всех подгрупп, сопряженных с H, называется ядром подгруппы H в группе G. Группа называется примитивной, если она содержит максимальную подгруппу с единичным ядром.

Лемма 1.4 [9, теоремы 4.41, 4.42]. *Пусть G – примитивная группа с примитиватором M. Тогда*:

(1) $\Phi(G) = 1$;

(2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ *и* $F(G)$ *является элементарной абелевой p-подгруппой порядка* p^n *для некоторого простого p*;

(3) *в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с* $F(G)$;

(4) $G = [F(G)]M$ *и* $O_p(M) = 1$;

(5) *M изоморфна неприводимой подгруппе группы* $GL(n, p)$.

***Лемма* 1.5** [9, теорема 2.8]. *Если* $K \le G$, *то* $N_G(K) / C_G(K)$ *изоморфна подгруппе из* $\mathrm{Aut}(K)$.

***Лемма* 1.6** [9, теорема 2.16]. *Если N – нормальная подгруппа в группе G и N циклическая, то* $\mathrm{Aut}(N)$ *абелева. Кроме того, если* $|N| = p$, *то* $\mathrm{Aut}(N) \cong Z_{p-1}$.

***Лемма* 1.7** [10, лемма 5]. *Если G – метанильпотентная группа, то p-длина группы G не превышает* 1 *для любого простого p.*

***Лемма* 1.8** [11, лемма 7]. *Пусть* $G = AB$ *– простая неабелева группа, где A и B – собственные холловы разрешимые подгруппы группы G. Тогда G является группой одного из следующих типов и допускает только приведенные факторизации*:

1. $G \cong SL_2(2^n)$, $n \ge 2$, *причем* $A \cong C_2^n \rtimes C_{2^n-1}$, $B \cong C_{2^n+1}$ и $A \cap B = 1$;

2. $G \cong PSL_2(q)$, $q \equiv -1 (mod\ 4)$, $q \notin \{7, 11\}$, *причем* $A \cong U \rtimes Z_{\frac{1}{2}(q-1)}$ $(|U| = q)$, $B \cong D_{q+1}$ *и* $A \cap B = 1$;

3. $G \cong PSL_2(7)$

(a) $A \cong C_7$, $B \cong S_4$ *и* $A \cap B = 1$,

(b) $A \cong C_7 \rtimes C_3$, $B \cong S_4$ *и* $A \cap B \cong C_3$,

(c) $A \cong C_7 \rtimes C_3$, $B \cong D_8$ *и* $A \cap B = 1$;

4. $G \cong PSL_2(11)$

(a) $A \cong A_4$, $B \cong C_{11} \rtimes C_5$ *и* $A \cap B = 1$,

(b) $A \cong D_{12}$, $B \cong C_{11} \rtimes C_5$ *и* $A \cap B = 1$;

5. $G \cong PSL_3(3)$, *причем* $A \cong C_{11}$, $B \cong 3^2 : 2S_4$, $A \cap B = 1$;

6. $G \cong M_{11}$, *причем* $A \cong C_{11} \rtimes C_5$, $B \cong 3^2 : Q_8.2$, $A \cap B = 1$.

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $G = HK$ *– конечная группа, H – B-подгруппа или нильпотентна, K – z-подгруппа и* $(|H|, |K|) = 1$.

(1) *Если группа G разрешима, то*

(1.1) *второй коммутант* $(G')'$ *является нильпотентной подгруппой*;

(1.2) *производная длина фактор-группы* $G / \Phi(G)$ *не превышает* 3;

(1.3) *p-длина группы G не превышает* 2 *для каждого* $p \in \pi(H)$ *и равна* 1 *для каждого* $p \in \pi(K)$.

(2) *Если группа G – простая, то G – группа одного из следующих типов*:

(2.1) $G \cong SL_2(2^n)$, $n \ge 2$, $2^n - 1$ *– простое число*, $H \cong C_2^n \rtimes C_{2^n-1}$, $K \cong C_{2^n+1}$;

(2.2) $G \cong PSL_2(q)$, $q = 2^m - 1$ – простое число, $m \ge 5$, $H \cong D_{q+1}$, $K \cong C_q \rtimes C_{\frac{1}{2}(q-1)}$;

(2.3) $G \cong PSL_2(7)$, $H \cong D_8$, $K \cong C_7 \rtimes C_3$;

(2.4) $G \cong PSL_2(7)$, $H \cong A_4$ *или* $H \cong D_{12}$, $K \cong C_{11} \rtimes C_5$.

Доказательство. (1) Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Докажем, что $G \in \mathfrak{NA}^2$. Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G. Фактор-группа

$$G / N = (HN / N)(KN / N),$$

где $HN / N \cong H / H \cap N$, поэтому HN / N либо B-группа, (см. лемму 1.1), либо нильпотентная группа. А фактор-группа $KN / N \cong K / K \cap N$, поэтому KN / N является z-группой. Ясно, что

$$(|HN / N|, |KN / N|) = 1.$$

По индукции $G / N \in \mathfrak{NA}^2$. По лемме 1.2 произведение $\mathfrak{NA}^2$ – насыщенная формация. Следовательно, по лемме 1.3, группа G примитивна. А по лемме 1.4 G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу, которая совпадет с подгруппой Фиттинга $F = F(G)$, а подгруппа Фраттини $\Phi(G) = E$ – единичная подгруппа. Кроме того, группа $G = [F]M$, $F = C_G(F)$ и $F = O_p(G)$ – элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \pi(G)$.

Предположим, что подгруппа F циклическая. Тогда $|F| = p$. По леммам 1.5 и 1.6 фактор-группа G / F изоморфна подгруппе из Z_{p-1}. Теперь $G \in \mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{NA}^2$.

Значит будем считать, что подгруппа F нециклическая. Так как H и K – холловы подгруппы группы G, то возможны следующие включения: $F \le H$ или $F \le K$.

Предположим, что $F \le K$. Так как F – элементарная абелева p-группа, содержащаяся в циклической силовской p-подгруппе z-группы K, то F имеет простой порядок p. Противоречие.

Теперь предположим, что $F \le H$. Если подгруппа H нильпотентна, тогда $H = H_p \times H_{p'}$, где H_p – силовская p-подгруппа, а $H_{p'}$ – p'-холлова подгруппа группы H. Ясно, что $F \le H_p$. Так как $F = C_G(F)$, то $H_{p'} = 1$. По лемме 1.4 $O_p(G / F) = 1$, следовательно $F(G / F) = F_2 / F$ – p'-группа. Теперь

$$F_2 / F \le KF / F \cong K / K \cap F,$$

значит все силовские подгруппы фактор-группы F_2 / F циклические, а так как F_2 / F нильпотентна, то F_2 / F – циклическая. Из свойств подгруппы Фиттинга разрешимой группы следует, что $C_{G/F}(F_2 / F) = F_2 / F$. По лемме 1.5

$$(G / F) / (C_{G/F}(F_2 / F)) =$$
$$= (G / F) / (F_2 / F) \cong G / F_2 \cong U \le \mathrm{Aut}(F_2 / F).$$

Так как F_2/F – циклическая, то по лемме 1.6 группа $\mathrm{Aut}(F_2/F)$ – абелева. Теперь $G/F_2 \in \mathfrak{A}$, $F_2/F \in \mathfrak{A}$ и $F \in \mathfrak{A}$, поэтому $G \in \mathfrak{A}^3 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Предположим теперь, что подгруппа H ненильпотентна. Тогда она является B-группой. По лемме 1.1 $H=[R]Q$, где R – нормальная силовская R-подгруппа, а Q – циклическая силовская q-подгруппа, причем r и q – простые числа и $r \neq q$. Так как подгруппа F нециклическая, то F – r-подгруппа и значит $r=p$. По лемме 1.4 $O_p(G/F)=1$, следовательно, $F(G/F)=F_2/F$ – p'-группа. Теперь в $F(G/F)=F_2/F$ все силовские подгруппы циклические, поэтому $F(G/F)=F_2/F$ – циклическая подгруппа. Повторяя доказательство из предыдущего абзаца, заключаем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Из определения произведения формаций $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ следует, что второй коммутант группы G нильпотентен. Утверждение (1.1) доказано.

По лемме 1.4 фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева, значит $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^3$. Это означает, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3, и утверждение (1.2) справедливо.

Из утверждения (1.1) следует, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Поэтому группа G является расширением метанильпотентной группы с помощью метанильпотентной. Так как по лемме 1.7 метанильпотентная группа имеет p-длину не более 1, то p-длина группы G не превышает 2 для всех $p \in \pi(G)$. Если $p \in \pi(K)$, то силовская p-подгруппа в G циклическая ввиду условий: $(|H|,|K|)=1$ и K – z-подгруппа. Теперь $l_p(G)=1$ согласно [8, IV.6.6] и утверждение (1.3) справедливо.

Утверждение (1) доказано полностью.

(2) Пусть теперь группа G – простая. Тогда применима лемма 1.8, согласно которой для группы имеется шесть возможностей.

Предположим, что $G=AB \cong SL_2(2^n)$, $n \geq 2$, причем $A \cong C_2^n \rtimes C_{2^n-1}$, $B \cong C_{2^n+1}$ и $A \cap B = 1$. Так как A ненильпотентна и содержит нециклическую силовскую подгруппу C_2^n, то $A \cong H \cong C_2^n \rtimes C_{2^n-1}$ – B-группа. Поскольку $C_G(G_2)=G_2 \cong C_2^n$, то $\Phi(H)=1$ и H – группа Шмидта. По свойствам групп Шмидта заключаем, что $|C_{2^n-1}|$ –простое число. Теперь G – группа из пункта (2.1).

Пусть теперь $G=AB \cong PSL_2(q)$, $q \equiv -1 (mod\ 4)$, $q \notin \{7,11\}$, причем $A \cong U \rtimes Z_{\frac{1}{2}(q-1)}$ $(|U|=q)$, $B \cong D_{q+1}$ и $A \cap B = 1$. Так как $|D_{q+1}|$ делится на 4, то силовская 2-подгруппа в D_{q+1} не циклическая и $B=D_{q+1}$ не может быть z-группой. Поэтому $H \cong B = D_{q+1}$ либо 2-группа, либо B-группа. Но B-группой она быть не может, поскольку D_{q+1} не 2-замкнута и ее силовская 2-подгруппа нециклическая. Следовательно, $H \cong B = D_{q+1}$ – диэдральная 2-группа и $q+1=2^m$ для некоторого $m \geq 4$. Подгруппа $A \cong K$ должна быть z-группой, значит, q – простое число. Поэтому $q=2^m-1$ – простое число Мерсенна. Теперь G – группа из пункта (2.2).

Так как H и K не могут быть изоморфны группе S_4, то при $G \cong PSL_2(7)$ подгруппа $H \cong D_8$, а подгруппа $K \cong C_7 \rtimes C_3$.

Так как A_4 и D_{12} являются B-группами, то при $G \cong PSL_2(7)$ подгруппа $H \cong A_4$ или $H \cong D_{12}$, а подгруппа $K \cong C_{11} \rtimes C_5$.

Изоморфизмы $G \cong PSL_3(3)$ и $G \cong M_{11}$ в нашем случае исключаются, поскольку в факторизациях этих групп не участвуют в качестве сомножителей нильпотентные группы и B-группы. □

Пример. Симметрическая группа S_4 степени 4 имеет производную длину, равную 3, и 2-длину, равную 2. Группа S_4 является произведением 2-подгруппы и циклической подгруппы порядка 3. S_4 также является произведением B-подгруппы S_3 и циклической подгруппы порядка 4. Этот пример указывает на то, что полученные оценки производной длины и p-длины являются точными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Княгина*, *В.Н.* О произведении B-группы и примарной группы / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 52–57.

2. *Княгина*. *В.Н.* О p-длине произведения двух групп Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 329–333.

3. *Княгина*. *В.Н.* О p-длине произведения двух групп B-групп / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 48–52.

4. *Беркович*, *Я.Г.* О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Математический сборник. – 1967. – Т. 74, № 1. – С. 75–92.

5. *Монахов*, *В.С.* О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С. 32–36.

6. *Монахов*, *В.С.* О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с циклическими силовскими подгруппами в сомножителях /

В.С. Монахов, И.К. Чирик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 6. – С. 911–920.

7. *Монахов*, *В.С.* О произведении *z*-группы и группы с нильпотентными собственными подгруппами / В.С. Монахов, Т.В. Тихоненко // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2008. – № 10. – С. 18–21.

8. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

9. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.

10. *Монахов*, *В.С.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

11. *Тихоненко*, *Т.В*. О факторизации конечных групп холловыми подгруппами / Т.В. Тихоненко, В.Н. Тютянов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 1 (52). – С. 125–133.

Поступила в редакцию 15.08.2025.

Информация об авторах

Княгина Виктория Николаевна – к.ф.-м.н., доцент