Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 513.73 **МАТЕМАТИКА**

Е. В. ШИКИН

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ПОГРУЖЕНИИ В ЦЕЛОМ В $\mathbf{R}^3$ НЕКОТОРЫХ МЕТРИК НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 4 VII 1973)

1. Н. В. Ефимов [1] доказал замечательное утверждение о том, что на любой полной регулярной поверхности в $\mathbf{R}^3$ верхняя грань кривизны неотрицательна. Отсюда вытекает, что полные метрики, верхняя грань кривизны которых отрицательна, не погружаются регулярно в $\mathbf{R}^3$. Естественно возникает вопрос о том, какие части полных метрик отрицательной кривизны погружаются в $\mathbf{R}^3$. Э. Г. Позняк [2] доказал, что любая компактная часть метрики такого вида в $\mathbf{R}^3$ погружается; им же было установлено, что бесконечная полоса в метрике отрицательной кривизны также может быть погружена в $\mathbf{R}^3$.

Основным результатом предлагаемой статьи является теорема об изометрическом погружении в целом в $\mathbf{R}^3$ так называемых орициклических кругов в полных метриках отрицательной кривизны (эти круги представляют собой аналог орициклических кругов в плоскости Лобачевского). Кроме того в статье формулируются некоторые результаты об изометрическом погружении компактных областей в метриках неположительной кривизны и некомпактных областей в метриках отрицательной кривизны.

2. Сформулируем условия регулярности рассматриваемых полных метрик отрицательной кривизны. Пусть на плоскости задана полная метрика W^- непрерывной отрицательной кривизны K, удовлетворяющей условию

$$-k_2^2 \leqslant K \leqslant -k_1^2 < 0, \tag{1}$$

где k_1 и k_2 — положительные постоянные. Из результатов [3] вытекает, что в этом случае в окрестности каждой точки W^- можно ввести полугеодезическую систему координат с линейным элементом вида $ds^2 = du^2 + B^2(u, v)\,dv^2$, где функция $B(u, v)$ удовлетворяет уравнению $B_{uu} + K(u, v)B = 0$. Потребуем, чтобы в каждой указанной выше полугеодезической системе координат кривизна K принадлежала классу $C^3(u, v)$. Отметим, что из [4] следует принадлежность кривизны K такому же классу регулярности в любой полугеодезической системе координат.

Применяя методику, изложенную в [5], можно установить, что в метрике W^- для любой выделенной геодезической Γ и направления на ней существует так называемая орициклическая система координат, линиями y которой являются эквидистантные орициклы Ω (предельные линии для неограниченно расширяющихся геодезических окружностей), а линиями x — ортогональные к ним геодезические (отметим, что Γ представляет собой одну из этих геодезических). Линейный элемент в построенной орициклической системе координат имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y)\,dy^2, \tag{2}$$

причем $B(0, y) = 1$.

Из соотношения (1) вытекает также следующее условие на B:

$$c_2 \exp(-k_2 x) \leqslant B \leqslant c_1 \exp(-k_1 x), \tag{3}$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные.

Будем требовать, чтобы для любого орицикла Ω в метрике W^- его геодезическая кривизна $\varkappa$ и производные $\varkappa$ по дуге орицикла Ω до третьего порядка включительно были ограничены, причем интегралы от первой производной $\varkappa$ по любому координатному четырехугольнику были равномерно ограничены. Потребуем также, чтобы $\operatorname{grad} K$ и его производные до второго порядка вдоль любого орицикла были равномерно ограничены. Для дальнейшего нам потребуется еще одно условие на изменение кривизны метрики K. Именно, если ввести обозначения $k=(-K)^{1/2}$, $Q={}^1/_2 \ln k$, то это условие будет иметь вид $|Q'|\leqslant\Delta k_1$, где Δ — постоянная, удовлетворяющая условию $0<\Delta<1$ (штрих означает дифференцирование по любой дуге).

Метрики W^-, удовлетворяющие перечисленным в этом пункте условиям, будем называть в дальнейшем сильно регулярными метриками типа Л.

3. Теорема 1. *Любой орициклический круг в сильно регулярной метрике типа Л может быть изометрически погружен в* R^3 *в виде поверхности класса* C^3.

Для доказательства теоремы используются основные уравнения теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах (см. ([2], [6])):

$$r_x+\frac{s}{B}r_y=F_1,\qquad s_x+\frac{r}{B}s_y=F_2, \tag{4}$$

в которых $r(x, y)/B(x, y)$ и $s(x, y)/B(x, y)$ — угловые коэффициенты искомых асимптотических линий, а F_1 и F_2 — известные функции x, y, r, s. Отметим, что система (4) эквивалентна уравнениям Петерсона — Кодацци и Гаусса в данной области изменения параметров x и y, если в этой области $r\neq s$.

Уравнения (4) преобразуются с помощью подстановки $r=\varepsilon kB+\varepsilon^2 R/B$, $s=-\varepsilon kB-\varepsilon^2 S/B$, где $\varepsilon>0$. Затем полученные уравнения при специальном выборе начальных условий заменяются системой интегральных уравнений вида

$$R=\int\limits_{+\infty}^{\xi}\Phi_1(x,y,R,S)\,d\tau,\ \ S=\int\limits_{+\infty}^{\xi}\Phi_2(x,y,R,S)\,d\tau, \tag{5}$$

причем интегралы в правых частях вычисляются соответственно вдоль интегральных кривых уравнений $dy/dx=s/B$, $dy/dx=r/B$, а x и y берутся из области $x\geqslant 0$.

Далее, при помощи специально построенных последовательных приближений доказывается существование в целом решения системы (5), удовлетворяющего условиям $R=O(B^2)$, $S=O(B^2)$. Отсюда и из выражения для r и s вытекает, что $r\neq s$ в полуплоскости $x\geqslant 0$ для всех достаточно малых ε, что обеспечивает существование искомого погружения.

4. Здесь мы приведем формулировки теорем о погружении в R^3 некоторых некомпактных частей метрик неположительной и отрицательной кривизны. Методика доказательства существования этих погружений сходна с методикой, описанной в п. 3.

Сформулируем условия, которые накладываются на рассматриваемые метрики.

Пусть W_0^- — полная метрика, заданная на плоскости, кривизна K которой равна нулю на некоторой кривой γ_0 и отрицательна во всех остальных точках. Пусть γ_0 — регулярная бесконечная жорданова кривая — заключена в бесконечную полосу Π между эквидистантными к γ_0 кривыми γ^+ и γ^-. Будем считать, что $k=O(\rho^\alpha)$, $\alpha>2$ (ρ — расстояние от точки $M\in\Pi$ до γ_0); $|\operatorname{grad} k|=O(k/\rho)$, $|(\operatorname{grad} k)_\gamma'|$, $|(\operatorname{grad} k)_\gamma''|=O(k/\rho)$; k_γ', k_γ'', $k_\gamma'''=O(k)$; здесь символ $'_\gamma$ означает дифференцирование вдоль линий $\gamma\subset\Pi$, эквидистантных к γ_0. Пусть кроме того геодезические кривизны $\varkappa$ линий γ и их производные вдоль γ до третьего порядка равномерно ограничены. Пусть, наконец, существует постоянная $\Delta>0$ такая, что $|Q'+\varkappa|\geqslant\Delta$. Тогда справедлива

Теорема 2. *При сформулированных выше условиях любая полоса, принадлежащая* Π, *регулярно погружается в* $\mathbf{R}^3$.

Пусть далее W^- — полная метрика, кривизна K которой отрицательна и стремится к нулю при удалении в бесконечность. Потребуем, чтобы вне некоторого геодезического круга с центром в произвольной точке M_0 $k=O(\rho^{-\beta})$, $\beta>2$; здесь ρ — расстояние от точки M_0 до произвольной точки M. Пусть $|\operatorname{grad} k|=O(k/\rho)$, а его первые и вторые производные вдоль геодезических окружностей удовлетворяют соотношениям $(|\operatorname{grad} k)'|=O(k/\rho^2)$, $|(\operatorname{grad} k)''|=O(k/\rho^3)$. Наложим условия на скорость изменения геодезических кривизн $\varkappa_0$ геодезических окружностей: $\varkappa_0\leqslant 1/\rho$, $\varkappa_0^{(n)}=O(1/\rho^{n+1})$, $n=1, 2, 3$; здесь производные вычисляются вдоль геодезических окружностей; $\Delta\varkappa_0>|Q'|$, где Δ — постоянное число, удовлетворяющее условию $0<\Delta<1$. Тогда справедлива

Теорема 3. *При сформулированных выше условиях внешность любой полуполосы в метрике* W^- *может быть регулярно погружена в* $\mathbf{R}^3$.

Автор приносит глубокую благодарность Н. В. Ефимову и Э. Г. Позняку за внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. В. Ефимов*, Матем. сборн., т. 76, 4, 499 (1968). [2] *Э. Г. Позняк*, ДАН, т. 170, № 4, 786 (1966). [3] *А. Д. Александров*, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948. [4] *Э. Р. Розендорн*, Матем. сборн., т. 70, № 4, 490 (1966). [5] *А. Л. Вернер*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 76, 130 (1965). [6] *Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко*, Системы квазилинейных уравнений, М., 1968