

В. А. ТИЩЕНКО, Р. Х. ХЕСТАНОВ

**ДИФРАКЦИЯ ПОЛЯ С ГРАНИЦЕЙ СВЕТ — ТЕНЬ
НА ПОЛУПЛОСКОСТИ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 30 I 1973)

В настоящей работе решена задача дифракции поля с границей свет — тень на идеально проводящей полуплоскости. Эта задача является ключевой для учета взаимодействия кромок различных тел, дифракция на которых рассматривается методами геометрической теории дифракции (г.т.д.). Решение искомой задачи позволяет расширить границы применимости г.т.д.

Рассмотрим дифракцию на полуплоскости A_2 (см. рис. 1) поля с границей свет — тень. Диаграмму направленности первичного поля зададим в виде интеграла Френеля.

Заданная диаграмма первичного поля соответствует первому члену в решении Зоммерфельда ⁽¹⁾ задачи дифракции на полуплоскости цилинд-

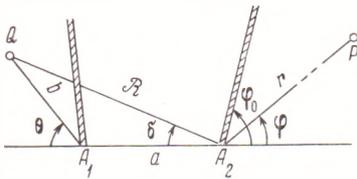


Рис. 1

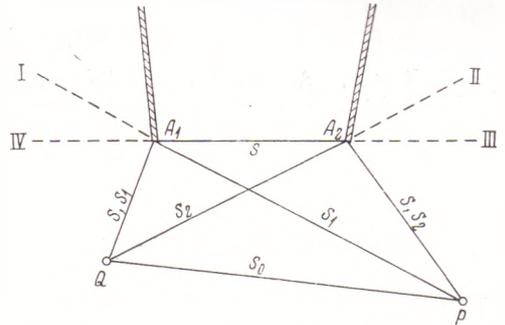


Рис. 2

рической волны источника $\sqrt{\pi/2H_0^4}$. Такая математическая идеализация — представление диаграммы направленности первичного поля в виде интеграла Френеля — сохраняет рассматриваемую особенность падающего поля — границу свет — тень и вместе с этим исключает из решения рассматриваемой задачи многократную дифракцию. Тем не менее, далее удобно сохранить геометрические термины задачи дифракции на полуплоскости A_1 .

Для решения задачи воспользуемся приведенным в работе ⁽²⁾ выражением для диаграммы рассеяния полуплоскости A_2 , облученной произвольным полем с диаграммой $g(\alpha)$,

$$F(\varphi) = F(\varphi) \mp F(2\varphi_0 - \varphi) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{g(\alpha) d\alpha}{\sin^{1/2}(\alpha - \varphi)} \mp \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{g(\alpha) d\alpha}{\sin^{1/2}(\alpha - 2\varphi_0 + \varphi)}. \quad (1)$$

Диаграмма направленности первичного поля, приведенная в кромку A_2 , есть

$$g(\alpha) = \frac{e^{ika \cos \alpha}}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{ihb \cos \beta}}{\sin^{1/2}(\beta - \alpha - \theta)} d\beta. \quad (2)$$

Контуры Γ_1 , Γ_2 и Γ в (1), (2) обходят слева полюса подынтегральных функций.

Ввиду полной аналогии вычислений выражений $F(\varphi)$ и $F(2\varphi_0 - \varphi)$ далее будем рассматривать только одно из них — $F(\varphi)$. Подставляя (2) в $F(\varphi)$, получим

$$F(\varphi) = \frac{1}{(4\pi i)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{ik(a \cos \alpha + b \cos \beta)}}{\sin^{1/2}(\alpha - \varphi) \sin^{1/2}(\beta - \alpha - \theta)} d\alpha d\beta. \quad (3)$$

Формула (3) соответствует частному случаю общей формулы, полученной в (3). Совмещая Γ_1 и Γ с контуром Зоммерфельда S_0 , учтем пересечение полюсов контурами, тогда

$$F(\varphi) = F_0 + F_1 + F_2 + F_3, \quad (4)$$

$$F_0 = \left[\frac{1 - \operatorname{sgn}(\varphi + \delta)}{2} \right] \left[\frac{1 - \operatorname{sgn}(\varphi + \theta)}{2} \right] e^{ik[a \cos \varphi + b \cos(\varphi + \theta)]}, \quad (5)$$

$$F_1 = \left[\frac{1 - \operatorname{sgn} \varphi}{2} \right] \frac{1}{4\pi i} \int_{S_0} \frac{e^{ik(a \cos \varphi + b \cos \beta)}}{\sin^{1/2}(\beta - \varphi - \theta)} d\beta, \quad (6)$$

$$F_2 = \left[\frac{1 - \operatorname{sgn} \theta}{2} \right] \frac{1}{4\pi i} \int_{S_0} \frac{e^{ik \mathcal{R} \cos \alpha}}{\sin^{1/2}(\alpha - \delta - \varphi)} d\alpha, \quad (7)$$

$$F_3 = \frac{1}{(4\pi i)^2} \int_{S_0} \int_{S_0} \frac{e^{ik(a \cos \alpha + b \cos \beta)}}{\sin^{1/2}(\alpha - \varphi) \sin^{1/2}(\beta - \alpha - \theta)} d\alpha d\beta, \quad (8)$$

где $\mathcal{R} = a \cos \delta + b \cos(\delta - \theta)$, а δ определяется из уравнения

$$a \sin \delta + b \sin(\delta - \theta) = 0.$$

Полученные компоненты (5) — (8) удобно интерпретировать, помещая точку наблюдения P на конечном расстоянии r и обозначив все эйконалы, как показано на рис. 2.

Компонента F_0 есть диаграмма направленности геометрического поля источника Q . При перемещении источника Q до границы I или точки наблюдения P до границы II компонента F_0 отлична от нуля.

Компонента F_1 есть диаграмма направленности краевой волны кромки A_1 , облученной источником Q ; она выражается через интеграл Френеля с аргументом $\sqrt{k(s_1 - s_0)}$. Компонента F_1 компенсирует разрыв F_0 на границе I и равна нулю, когда точка P выше границы III.

Компонента F_2 есть диаграмма направленности краевой волны кромки A_2 , облученной источником Q ; она выражается через интеграл Френеля с аргументом $\sqrt{k(s_2 - s_0)}$. Компонента F_2 компенсирует разрыв F_0 на границе II и равна нулю, когда источник Q выше границы IV.

Компонента F_3 , очевидно, компенсирует разрыв F_1 на границе III и F_2 на границе IV. Если Q и P находятся вдали от этих границ ($\theta \neq 0$, $\varphi \neq 0$), то F_3 вычисляется методом стационарной фазы (4) и соответствует краевой волне с эйконалом s и амплитудой в виде ряда по отрицательным степеням параметров $\sqrt{2ka} \sin \frac{\theta}{2}$, $\sqrt{2kb} \sin \frac{\varphi}{2}$.

Все сказанное в значительной степени было известно и ранее. Сложность решения искомой задачи заключается в вычислении F_3 в общем случае, так как именно эта часть решения описывает дифракцию поля с границей свет — тень на полуплоскости в наиболее интересной ситуации, когда упомянутая граница находится вблизи кромки A_2 .

Поставленную задачу можно считать решенной, если преобразовать двукратный интеграл F_3 с двумя полюсами к однократному каноническому интегралу. Эта цель достигнута с помощью следующих математических операций.

- 1) Контуры S_0 проводятся по мнимой оси аргументов.
- 2) Вводятся переменные ρ, ψ по формулам

$$\sin \frac{\alpha}{2} = i \sqrt{\frac{R}{2a}} \rho \sin \psi, \quad \sin \frac{\beta}{2} = i \sqrt{\frac{R}{2b}} \rho \cos \psi, \quad R = a + b.$$

Тогда

$$F_3 = \frac{e^{ikR}}{(4\pi i)^2} \int_0^\infty e^{ikR\rho^2} K(\rho) \rho d\rho, \quad K(\rho) = \int_0^{2\pi} \Lambda(\psi) d\psi.$$

3) Далее $K(\rho)$ заменой $z = e^{i\psi}$ приводится к интегралу по замкнутому единичному контуру в комплексной плоскости z .

4) Для вычисления $K(\rho)$ применяется теорема вычетов. Конечная формула для F_3 имеет вид

$$F_3 = f_1 + f_2 + d, \tag{9}$$

где

$$f_1 = \frac{e^{ikR}}{2\pi} e^{-it_0^2} \int_{|t_0| \operatorname{sgn} \varphi}^{\infty \cdot \operatorname{sgn} \varphi} \frac{\tau_1 e^{i\xi^2} d\xi}{\xi^2 + \tau_1^2},$$

$$\tau_0 = \sqrt{k(s-s_1)} = \sqrt{2ka} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \tau_1 = \sqrt{k(s_1-s_0)} = \sqrt{2kb} \sin \frac{\theta + \varphi}{2};$$

$$f_2 = \frac{e^{ikR}}{2\pi} e^{-it_0^2} \int_{|t_0| \operatorname{sgn} \theta}^{\infty \cdot \operatorname{sgn} \theta} \frac{t_1 e^{i\xi^2} d\xi}{\xi^2 + t_1^2}$$

$$t_0 = \sqrt{k(s-s_1)} = \sqrt{k(R-\mathcal{R})}, \quad t_1 = \sqrt{k(s_2-s_0)} = \sqrt{2k\mathcal{R}} \sin \frac{\varphi + \delta}{2};$$

$$d = \frac{e^{ikR}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2ik} \right)^n (B_n^+ - B_n^- - C_n),$$

$$B_n^\pm = \frac{1}{4i} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left\{ \frac{\cos^{1/2} \gamma^\pm}{\sin^{1/2}(\gamma^\pm - \varphi)} \frac{d\gamma^\pm}{da} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \left(\sin \frac{\gamma^\pm}{2} \right)^{2(m-n)} \right\},$$

$$C_n = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left\{ \frac{\tau_1 \cos^{1/2} \varphi}{\tau_1^2 + \tau_0^2} \frac{d\tau_0}{da} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{2(m-n)} \right\},$$

$$\gamma^\pm = \pm \beta_0 - \delta, \quad \mathcal{R} \sin \beta_0 = 2i\sqrt{ab} \sin^{1/2} \theta.$$

Входящий в решение (9) канонический интеграл вида

$$G(p, q) = q e^{-ip^2} \int_p^\infty \frac{e^{i\xi^2} d\xi}{\xi^2 + q^2}$$

называется обобщенным интегралом Френеля. Он был введен и исследован Клеммовым и Сениором (6).

Таким образом, в решение (4) входят обычные и обобщенные интегралы Френеля. Аргументами последних являются корни из разности айкналов:

$$s - s_1, \quad s_1 - s_0 \quad \text{для } f_1;$$

$$s - s_2, \quad s_2 - s_0 \quad \text{для } f_2.$$

Значение параметров	Геометрия задачи	Вид решения	Результат
$s_1 = s_0, s_2 = s, b = 0$	Источник находится в кромке	$f_1 = 0, f_2$ — интеграл Френеля	Решение Зоммерфельда
$\tau_1 \rightarrow \infty, t_1 \rightarrow \infty$ $kb \rightarrow \infty$	Падающая волна плоская	f_1, f_2 — интегралы Френеля	Известен (⁷ , ⁸)
$\tau_0, t_0 \gg 1$	Точка наблюдения P и источник Q находятся вдали от границ III и IV	f_1, f_2 — асимптотические ряды	Известен (⁷ , ⁸)
$t_0 \gg 1$	Источник Q вдали от границы IV	f_1 — обобщенный интеграл Френеля, f_2 — асимптотический ряд	Получен в данной работе
$\tau_0 \gg 1$	Точка наблюдения P вдали от границы III	f_2 — обобщенный интеграл Френеля, f_1 — асимптотический ряд	Получен в данной работе
Аргументы произвольны, $ka \gg 1$	Точка наблюдения P и источник Q расположены произвольно	f_1, f_2 — обобщенные интегралы Френеля	Получен в данной работе
$\theta = 0$ $a = b$	Кромка A_2 находится на границе свет-тень	f_2 — интеграл Френеля; f_1 — квадрат интеграла Френеля	Получен в данной работе

В приводимой табл. 1 рассмотрены различные значения параметров и геометрия задачи; приводится вид решения с учетом асимптотик обобщенного интеграла Френеля, результаты сравниваются с ранее известными.

В заключение отметим, что методика вычисления F_3 , по-видимому, пригодна для преобразования n -кратного интеграла с n полюсами к однократному, что позволит в дальнейшем рассмотреть многократную дифракцию на двух полуплоскостях.

Поступило
24 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, 1953. ² Р. Х. Хестанов, Радиотехника и электроника, 15, 2, 289 (1970). ³ А. Ф. Филиппов, ПММ, 28, 6, 1083 (1964). ⁴ М. М. Тененбаум, Радиотехника и электроника, 5, 12, 1909 (1960). ⁵ Р. С. Слеммон, Т. В. А. Сенюг, Proc. Camb. Phil. Soc., 49, № 3, 570 (1953). ⁶ Н. М. Макдональд, Proc. Lond. Math. Soc., 14, 410 (1915). ⁷ В. А. Боровиков, Дифракция на многоугольниках и многогранниках, «Наука», 1966. ⁸ П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, 1962.