Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 517.516 *МАТЕМАТИКА*

Б. К. ПЧЕЛИН

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 12 VI 1973)

1°. Поведение аналитической и гармонической функции в окрестности изолированной особой точки определяется классической теоремой Коши — Римана, утверждающей, что гармоническая или аналитическая функция, ограниченная в окрестности изолированной особой точки, должна быть гармонична (соответственно аналитична) и в этой точке.

Весьма важным является вопрос о выяснении того, каким свойством должно обладать множество «устранимых особенностей» для различного класса функций, чтобы теорема Коши — Римана могла быть обобщена.

Для гармонических функций этот вопрос решается теоремой, указанной, например, в работе ([1]). В данной работе теорема Коши — Римана об «устранимых особенностях» обобщается на случай полигармонических функций любого натурального порядка p.

2°. В работе приняты следующие обозначения: D_{ih}, $i=1, 2, \ldots, p$,— область, лежащая внутри области D и имеющая границу, которая удалена от границы области D на расстояние $>ih$; $\omega(P_i, h)$ — гипершар радиуса h с центром в точке P_i, $\omega(h)$ — его объем; $P_p\in\bar{D}_{ph}$, $P_{p-1}\in\bar{D}_{(p-1)h}, \ldots, P_1\in D_h$, $M\in D$, $C_p^{(k)}$ — число сочетаний из p элементов по k.

Теорема 1. *Пусть E — замкнутое множество пространства n измерений. Если множество E емкости нуль, то каждая функция $u(P)$, ограниченная и полигармоническая порядка p в окрестности точек множеств E, будет полигармонической порядка p всюду в некоторой области D, содержащей множество E.*

Доказательство. Пусть $P_0\in E$. Примем $u(P_0)=\lim\limits_{P\to P_0} u(P)$. Тогда функция $u(P)$ будет определена всюду в некоторой односвязной области D, содержащей множество E. Выберем некоторую жорданову поверхность β, расположенную целиком в области D и удаленную от границы области D на расстояние $>(p-1)h$; внутри β расположено множество E. Обозначим через D_β ту часть области D, которая ограничена поверхностью β. Построим функцию $W(P)$, которая была бы гармонической во всей области D_β и на поверхности β принимала бы те же значения, что и функция $\Delta_h^{(p-1)}u(P)$,

$$\Delta_h^{(p-1)}u(P)=\frac{1}{\omega^{p-1}(h)}\int\limits_{\omega(P,h)}d\omega_{p-1}\int\limits_{\omega(P_{p-2},h)}d\omega_{p-2}\ldots\int\limits_{\omega(P_2,h)}d\omega_2\int\limits_{\omega(P_1,h)}u(M)\,d\omega_1-$$

$$-\frac{C_{p-1}^{(p-2)}}{\omega^{p-2}(h)}\int\limits_{\omega(P,h)}d\omega_{p-1}\int\limits_{\omega(P_{p-2},h)}d\omega_{p-2}\ldots\int\limits_{\omega(P_2,h)}u(P_1)\,d\omega_2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{p-2}C_{p-1}^{(1)}}{\omega(h)}\int\limits_{\omega(P,h)}u(P_{p-2})\,d\omega_{p-1}+(-1)^{p-1}u(P),$$

где $P=P_{p-1}\in D_{(p-1)h}$.

Согласно интегральному определению полигармонической функции ([2]), если $\Delta_h^{(p-1)}u(P)$ является гармонической функцией в области $D_{(p-1)h}$, то

$u(P)$ является полигармонической функцией порядка p в области D. Следовательно, достаточно доказать, что равенство $\Delta_h^{(p-1)} u(P) = W(P)$ справедливо для всех точек P, расположенных в области D_β.

Пусть точка P_0 есть любая фиксированная точка области D_β, не принадлежащая множеству E. Так как замкнутое множество E емкости нуль, то его точки можно заключить внутрь конечного числа замкнутых поверхностей Жордана δ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\omega(P_0, \delta, G_{\beta+\delta}) < \varepsilon, \tag{1}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число; $G_{\beta+\delta}$ — часть области D_β, содержащая точку P_0 и граница которой состоит из поверхности δ и β; $\omega(P, \delta, G_{\beta+\delta})$ — гармоническая функция в точках $P \in G_{\beta+\delta}$, равная нулю на поверхности β и равная единице на поверхностях δ.

Пусть $M = \sup\limits_{P \in \overline{D}_\beta} |\Delta_h^{(p-1)} u(P)|$. Тогда $\sup\limits_{P \in D_\beta}|W(P)| \leqslant M$.

Следовательно, функция $v(P) = \Delta_h^{(p-1)} u(P) - W(P)$ по абсолютной величине в области D_β не превышает $2M$.

Рассмотрим в области $G_{\beta+\delta}$ функцию $w_1(P) = v(P) + 2M\omega(P, \delta, G_{\beta+\delta})$. Принимая во внимание высказанные выше утверждения, получаем: функция $w_1(P)$ является гармонической в области $G_{\beta+\delta}$, равна нулю на поверхности β и неотрицательна на поверхностях δ. Тогда, в силу принципа экстремума для гармонической функции, в точках $P \in G_{\beta+\delta}$ имеет место неравенство

$$v(P) + 2M\omega(P, \delta, G_{\beta+\delta}) \geqslant 0. \tag{2}$$

Так как $P_0 \in G_{\beta+\delta}$, то из неравенств (1) и (2) находим

$$v(P_0) \geqslant -2M\omega(P_0, \delta, G_{\beta+\delta}) \geqslant -2M\varepsilon,$$

т. е. $v(P_0) \geqslant 0$.

Если рассмотреть функцию $w_2(P) = v(P) - 2M\omega(P, \delta, G_{\beta+\delta})$, то аналогичными рассуждениями получаем $v(P_0) \leqslant 0$. Отсюда, в силу однозначности функции $v(P)$, находим $v(P_0) = 0$.

Следовательно, $\Delta_h^{(p-1)} u(P_0) = W(P_0)$.

Так как P_0 — произвольная точка области D_β, не принадлежащая множеству E, то получаем

$$\Delta_h^{(p-1)} u(P) = W(P) \quad \text{для } P \in D_\beta, \quad P \notin E. \tag{3}$$

Пусть $P_0 \in E$. Так как по доказанному выше равенство (3) справедливо для всех точек P, расположенных в окрестности множества E, то

$$\lim \Delta_h^{(p-1)} u(P) = \lim_{P \to P_0} W(P) = W(P_0).$$

Принимая в точке $P_0 \in E$ значение функции $\Delta_h^{(p-1)} u(P)$ равным $\lim\limits_{P \to P_0} \Delta_h^{(p-1)} u(P)$, получим, что функция $\Delta_h^{(p-1)} u(P)$ будет гармонической и в точке $P_0 \in E$.

Теорема 1 доказана.

3°. Теорема 2. *Пусть E — замкнутое множество пространства n измерений. Если множество E положительной гармонической меры, то существует функция $u(P)$, ограниченная и полигармоническая порядка p в окрестности точек множества E, которая, однако, не является полигармонической порядка p во всех точках множества E.*

Доказательство. Обозначим через G_β область, получаемую из области D_β удалением множества E. Так как множество E есть множество положительной гармонической меры, то выражение $\omega(P, E, G_\beta)$ определяет в G_β ограниченную и положительную гармоническую функцию. Функция $\omega(P, E, G_\beta)$ не может быть гармонической в точках множества E. В самом деле, так как на жордановой поверхности β функция $\omega(P, E, G_\beta)$ равна нулю, то если бы эта функция была гармонической в области D_β, содержащей множество E, то она была бы равна нулю всюду в области D_β, что противоречит условию теоремы. Тогда всякая функция $u(P)$, однозначная в некоторой области D пространства n измерений, интегрируемая по Лебегу во всяком гипершаре, лежащем внутри области D, и в точках области $D_\beta \subset D$, удовлетворяющая условию $\Delta_h^{(p-1)} u(P) = \omega(P, E, D_\beta)$, будет являться функцией полигармонической порядка p в области D_β, за исключением тех точек множества $E \subset D_\beta$, в которых функция $\omega(P, E, D_\beta)$ не является гармонической.

Горьковский политехнический институт
им. А. А. Жданова

Поступило
12 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.— Л., 1941.
[2] И. И. Привалов, Б. К. Пчелин, Матем. сборн., 2, 44, 745 (1937).