Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 534.222.2 *ГИДРОМЕХАНИКА*

О. В. РУДЕНКО, А. С. ЧИРКИН

О НЕЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А. М. Обуховым 12 VI 1973)

Предметом настоящей работы является анализ процесса искажения спектра случайных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией. Важность рассматриваемой задачи обусловлена наличием разного рода реальных источников, являющихся по существу источниками шумовых волн.

Распространение нелинейных волн в ряде областей механики и физики описывается уравнением вида ([1])

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\alpha U\frac{\partial U}{\partial \eta}=-\delta U+\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k\frac{\partial^k U}{\partial \eta^k}. \tag{1}$$

Это уравнение, сформулированное вначале для некоторых задач гидромеханики ([2, 3]), ныне широко применяется при изучении нелинейных волн в радиофизике ([4]), акустике ([5]), физике плазмы ([6]) и т. д. Для нелинейной акустики, например, переменные z, η, U имеют соответственно смысл расстояния, времени в бегущей системе координат и колебательной скорости. Константы β_k ответственны за высокочастотную дисперсию и поглощение, δ связано с низкочастотной диссипацией.

Относительный вклад различных членов уравнения (1) в искажение исходного профиля волны можно учесть, перейдя к безразмерным переменным

$$V=U/U_0,\quad \zeta=\alpha U_0\omega_0 z,\quad \theta=\omega_0\eta, \tag{2}$$

где U_0, ω_0 — некоторые характерные параметры задачи.

В переменных (2) уравнение (1) записывается в виде

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta}-V\frac{\partial V}{\partial \theta}=-DV+\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_k\frac{\partial^k V}{\partial \theta^k}. \tag{3}$$

Коэффициенты D и Γ_k позволяют оценить конкуренцию нелинейной деформации профиля волны и диссипативного или дисперсионного процессов. Например, Γ_2^{-1} есть так называемое акустическое число Рейнольдса $\Gamma_2^{-1}\sim\alpha U\dfrac{\partial U}{\partial \eta}\Big/\beta_2\dfrac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$.

Для малых Γ_k и достаточно гладкого начального профиля V, не содержащего крутых участков типа разрывов, можно положить $\Gamma_k=0$ ($\beta_k=0$); границы применимости этого приближения обсуждаются ниже. Решение соответствующего уравнения с условием $U=\xi(\eta)$, заданным при $z=0$, имеет вид

$$v=\xi(\eta+\alpha v x), \tag{4}$$

где

$$v=Ue^{\delta z},\quad x=(1-e^{-\delta z})/\delta. \tag{5}$$

Выражение (4) по форме аналогично известному риманову решению и переходит в него при $\delta=0$. При малых значениях числа D оно описывает деформацию исходного профиля волны вплоть до образования в нем разрывов. Однако нетрудно видеть, что при больших D низкочастотная диссипация приводит к установившемуся профилю волны; разрывы при этом могут и не образоваться ([4]).

Строгий спектральный анализ выражения (4) проведен пока главным образом для гармонического возмущения $\xi(\eta)=A\sin\omega_0\eta$. В этом случае образование ударной волны трактуется как генерация высших гармоник начального процесса.

Изменение спектра немонохроматической волны на основе теории возмущений рассматривалось в работе ([7]). В последнее время предприняты попытки решить задачу о распространении случайного возмущения, либо используя риманово решение (4) ([8]), либо непосредственно с помощью уравнения (1) ([9]). В работах ([8], [9]) получены асимптотические результаты, не описывающие, однако, динамику изменения спектра исходной волны. Разумеется, трудности связаны с нелинейным характером уравнения (1) и неявной формой решения (4). В настоящей работе их удалось частично преодолеть и получить ряд выражений, описывающих трансформацию спектра случайных волн с произвольными шириной и видом спектра.

В соответствии со свойствами δ-функции можно написать

$$v(\eta,x)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} v(\eta',x)\,e^{i\omega(\eta-\eta')}\,d\omega\,d\eta'. \tag{6}$$

Подставим (4) в (6); при помощи замены $\eta'=\theta-\alpha x\xi(\theta)$ и интегрирования по частям $v(\eta,x)$ удается представить как явную функцию от $\xi(\eta)$:

$$v(\eta,x)=-\frac{i}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega}\,\dot\xi(\theta)\,e^{-i\omega[\theta-\alpha x\xi(\theta)-\eta]}\,d\omega\,d\theta. \tag{7}$$

Производная $\dot\xi(\theta)=d\xi(\theta)/d\theta$ с помощью оператора

$$L(\theta)=d/d\theta+i\omega \tag{8}$$

выражается через подынтегральную экспоненту

$$[\dot\xi(\theta)-L(\theta)]\,e^{i\omega[\theta-\alpha x\xi(\theta)]}=0. \tag{9}$$

Из (7) и (9), таким образом, следует, что моменты n-го порядка процесса $v(\eta,\ x)$ определяются n-мерной характеристической функцией процесса $\xi(\eta)$.

Ограничимся расчетом корреляционной функции

$$B(\eta_1,\ \eta_2;\ x)=\overline{v(\eta_1,\ x)\,v(\eta_2,\ x)}. \tag{10}$$

В этом случае операция усреднения сводится к нахождению двумерной характеристической функции

$$C(\omega_1,\ -\omega_2)=\langle\exp i\alpha x[\omega_1\xi(\theta_1)-\omega_2\xi(\theta_2)]\rangle. \tag{11}$$

Пусть $\xi(\eta)$ — стационарный гауссов случайный процесс со средним значением $\bar\xi=0$, тогда

$$C[\omega_1,\ -\omega_2,\ R(\theta_1-\theta_2)]=\exp\{-{}^1\!/_2\varkappa^2[\omega_1^2+\omega_2^2-2\omega_1\omega_2R(\theta_1-\theta_2)]\}, \tag{12}$$

где $\varkappa=\alpha\sigma x$, σ^2 — интенсивность и $R(\theta)$ — коэффициент корреляции процесса $\xi(\eta)$.

Для корреляционной функции (10) в произвольном сечении нелинейной среды, таким образом, получаем

$$B(\tau,x)=-\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty}\{\ddot{R}(\theta)+(\varkappa\omega)^2\dot{R}^2(\theta)\}C[\omega,-\omega,R(\theta)]e^{-i\omega\theta}\,d\theta\,d\omega. \tag{13}$$

Произведя замену $Q(\theta)=\exp[(\varkappa\omega)^2R(\theta)]$ и интегрируя, имеем

$$B(\tau,x)=-\sigma^2\int_0^{\infty}\dot{R}(\theta)\,\Phi\left[\frac{\theta-\tau}{2\varkappa[1-R(\theta)]^{1/2}}\right]d\theta, \tag{14}$$

где $\Phi(t)$ — функция ошибок.

Согласно теореме Винера — Хинчина, для спектральной плотности процесса из (13) получаем

$$S(\omega,x)=-\frac{\sigma^2}{\pi\omega}e^{-(\varkappa\omega)^2}\int_0^{\infty}\dot{R}(\theta)\,e^{(\varkappa\omega)^2R(\theta)}\sin\omega\theta\,d\theta, \tag{15}$$

или в другой форме

$$S(\omega,x)=\frac{\sigma^2}{\pi}\frac{e^{-(\varkappa\omega)^2}}{(\varkappa\omega)^2}\int_0^{\infty}[e^{(\varkappa\omega)^2R(\theta)}-1]\cos\omega\theta\,d\theta. \tag{16}$$

Выражения (13) — (16) позволяют проследить за искажением спектра начального возмущения произвольной ширины и формы. Удобство пользования (15) или (16) зависит от вида функции $R(\theta)$. Разлагая экспоненту под интегралом (16) в ряд, получаем

$$S(\omega,x)=\frac{\sigma^2}{2\pi}e^{-(\varkappa\omega)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varkappa\omega)^{2(n-1)}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}R^n(\theta)\,e^{-i\omega\theta}\,d\theta. \tag{17}$$

Отсюда следует, что по мере распространения исходной волны (ей соответствует $n=1$) ее спектральная плотность уменьшается, спектральная же плотность возбуждаемых гармоник с ростом $\varkappa$ сначала нарастает. Для широкого исходного спектра спектры всех гармоник перекрываются и характер его трансформации в целом существенно зависит от формы исходного распределения. Если, например, спектр сосредоточен вблизи нулевой частоты $\omega=0$, то в нелинейной среде он деформируется таким образом, что спектральная плотность на низких частотах уменьшается, а на высоких — возрастает. Другими словами, идет процесс перекачки энергии из интенсивных длинноволновых компонент в коротковолновые. Если же максимум спектральной плотности приходится на частоту $\omega=\omega_0\neq0$, то происходит как процесс преобразования в более коротковолновый (относительно $k_0=\omega_0/c$) спектр, так и параметрическая подкачка его длинноволновой части. Сказанное иллюстрируется кривыми рис. 1, построенными для $R(\theta)=(1-2\gamma^2\theta^2)\exp(-\gamma^2\theta^2)$ *.

В качестве другого примера остановимся на случае узкополосного начального возмущения, когда корреляционная функция на входе равна $R(\theta)=b(\theta)\cos\omega_0\theta$, где $b(\theta)$ — медленно изменяющаяся функция на периоде $2\pi/\omega_0$. С учетом этого обстоятельства для нормированной функции $B(\tau)$ (14) получим

$$\tilde{B}(\tau,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n(\tau,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n\omega_0\varkappa)^2}I_n[(n\omega_0\varkappa)^2b(\tau)]\cos n\omega_0\tau. \tag{18}$$

---

* *Примечание при корректуре.* Такое поведение акустического спектра недавно наблюдалось в работе ([12]).

Интересно сопоставить рост интенсивностей шумовых $E_n^{(N)}=\tilde{B}_n(0,\ \varkappa)$ и регулярных $E_n^{(S)}$ гармоник; интенсивность последних определяется из разложения (4) в ряд Бесселя — Фубини ([10])

$$E_n^{(s)}=\frac{4}{(n\alpha\varkappa\omega A)}J_n^2(n\alpha\varkappa\omega A). \tag{19}$$

При малых $\varkappa\omega_0$ ($n\varkappa\omega_0<1$) интенсивность шумовых гармоник больше регулярных в $n!$ раз ($E_n^{(N)}=n!E_n^{(S)}$ как и в нелинейной оптике ([11])). Вследствие этого при одинаковых интенсивностях образование ударной волны для случайного возмущения происходит на меньших расстояниях, чем для регулярного возмущения.

Пользуясь выражениями (15), (16) и (18), нетрудно показать, что спектральная плотность при $\omega\to\infty$ изменяется по закону ω^{-3} ([8]). Этот результат формально следует из (16) и (18) при $\nu=\varkappa|\ddot{R}(0)|^{1/2}>1$ (где $-\ddot{R}(0)\simeq\Delta\omega^2$, $\Delta\omega$ — ширина исходного спектра). Однако при $\nu>1$ эти выражения неправильно описывают форму спектра, поскольку при этом интенсивность $E(z)=B(0,\ z)$ не остается постоянной. Непосредственно же из (1) следует, что в случае $\delta=\beta_k=0$ значение $E(z)=\overline{v^2}$ должно сохраняться. Указанное расхождение обусловлено тем, что вследствие флуктуационного характера возмущений в некоторых выбросах образуются разрывы, не описываемые, однако, нашей моделью. Решение (4) становится неоднозначной функцией переменной η и, строго говоря, не может быть разложено в спектр. Вместе с тем такая процедура при $\nu<1$ приближенно верна. Отклонение же $B(0,\ z)$ от своего первоначального значения σ^2 растет с увеличением ν, и критерием применимости формулы (15) может служить заданное отклонение $B(0,z)$ от σ^2.

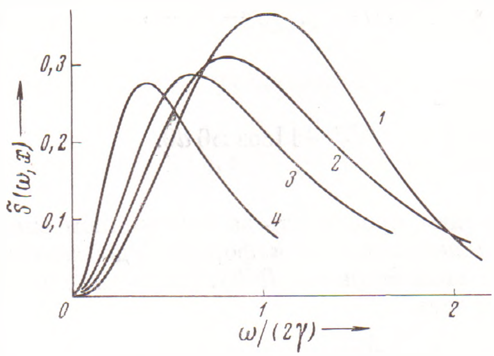

Рис. 1. Изменение формы широкополосного исходного спектра (*1*)

$$S(\omega\ 0)=\frac{\sigma^2}{\gamma\pi^{1/2}}\left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^2\cdot\exp\left[-\left(\frac{\omega}{2\gamma}\right)^2\right]$$

в нелинейной среде для различных значений приведенного расстояния $\varkappa\gamma$: *2* — $1/6$; *3* — $1/2\sqrt{3}$; *4* — $1\sqrt{3}$. $\tilde{S}(\omega,x)=S(\omega,x)(\gamma\pi^{1/2}/\sigma^2)$.

Авторы глубоко благодарны акад. А. М. Обухову за полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, 2, 193 (1971). [2] И. М. Бюргерс, В сборн. Проблемы механики, ИЛ, 1955. [3] Сборн. Нелинейная теория распространения волн, М., 1970. [4] Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 6, 919 (1961). [5] С. Н. Солуян, Р. В. Хохлов, Вестн. Московск. унив., 3, 52 (1961). [6] C. S. Gardner, G. K. Morikawa, Courant Inst. Math. Rep. NJO, 9082 (1960). [7] Л. К. Зарембо, Акустич. журн., 7, 2, 189 (1961). [8] В. Н. Кузнецов, Акустич. журн., 16, 1, 155 (1970). [9] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ДАН, 208, 4, 794 (1973). [10] К. А. Наугольных. В сборн. Мощные ультразвуковые поля, «Наука», 1967. [11] С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, М., 1971. [12] F. M. Pestorius, D. T. Blackstock, Symposium on Finite-amplitude Wave Effects in Fluids, Kopenhagen, 1973.