Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (153), 2025

Информатика

УДК 004.021 EDN: HOIJRX

Анализ чувствительности параметров мета- и эвристического алгоритмов оптимизации посредством статистических критериев

Е.М. Борчик, Д.А. Денисевич

Описывается методика и проводится анализ чувствительности параметров мета- и эвристического алгоритмов оптимизации для решения задачи распределения заказов с целью минимизации итоговой суммарной стоимости переналадки оборудования. Установлено, что использование параметра количество поколений для генетического алгоритма в большей степени влияет на решение, чем параметр количество итераций у алгоритма локального поиска 2-opt. Анализ чувствительности показал, что решение задачи становится «точнее» за счет кратного увеличения значения параметра поколения для генетического алгоритма и становится менее чувствительным к последующему незначительному увеличению значения параметра, при этом время поиска решения увеличивается.
Ключевые слова: анализ чувствительности, мета- и эвристические алгоритмы, статистический анализ, минимизация стоимости.

The methodology is described and the sensitivity analysis of the parameters of meta- and heuristic optimization algorithms is carried out for solving the problem of order distribution in order to minimize the final total cost of equipment reconfiguration. It has been established that the use of the number of generation parameter for the genetic algorithm has a greater impact on the solution than the number of iteration parameter for the 2-opt local search algorithm. The sensitivity analysis showed that the solution becomes «more accurate» due to a multiple increase in the value of the generation parameter for the genetic algorithm and becomes less sensitive to a subsequent minor increase in the parameter value, while the search time increases.
Keywords: sensitivity analysis, meta- and heuristic algorithms, statistical analysis, cost minimization.

Введение. Анализ чувствительности параметров алгоритмов оптимизации позволяет определить, как изменения параметров влияют на качество решения. Это особенно важно для метаэвристических алгоритмов (например, генетического) [1], где параметры (размер популяции, вероятность мутации и др.) значительно влияют на поиск решения. Для эвристических алгоритмов (например, локальный поиск 2-opt [2]) анализ чувствительности также важен, но обычно они имеют меньше параметров.

В производственных задачах часто требуется анализ данных, при этом для их обработки и поиска решения нередко применяются алгоритмы оптимизации (АО), некоторые из которых основаны на случайном поиске. Использование точных методов решения, с помощью детерминированных алгоритмов, сегодня является нецелесообразным, т. к. такие методы применяются для анализа небольшой размерности данных. В качестве альтернативы используются метаэвристические алгоритмы, которые реализуют поиск приближенного решения. В связи с чем возникает необходимость в принятии решений на основе статистической значимости – процесса выбора оптимальных стратегий или параметров в реализуемых алгоритмах с использованием статистических методов, которые позволяют оценить, насколько наблюдаемые различия в данных являются неслучайными и значимыми для принятия обоснованных решений. Исследовать чувствительности параметров необходимо при использовании АО к одинаковой задаче.

Целью работы является анализ чувствительности откликов в зависимости от изменения параметров АО, которые помогут определить влияние параметров на результат целевой функции (ЦФ) с помощью статистических критериев. Если модель детерминированная (без случайностей), тогда анализ чувствительности сводится к простому сравнению значений без статистической значимости.

Под чувствительностью ЦФ будем принимать:

– насколько сильно изменяется значение ЦФ при изменении параметров алгоритма оптимизации (например, размера популяции в ГА, количества поколений в 2-opt).

– насколько устойчиво решение (насколько сильно оно меняется при небольших изменениях параметров).

Для достижения цели можно использовать три класса чувствительности (высокая, средняя, низкая). Для ЦФ определяется множество значений параметров АО, на которых данный АО будет вести себя наилучшим образом.

Для исследования АО будет использована совокупность различных статистических критериев. Для полной и всесторонней оценки необходимо использование критериев оценки однородности разброса, а именно критериев согласия Пирсона, Колмогорова и Мизеса. Также для исследования центральных тенденций выборок-откликов будут применяться критерии Фишера, Левене, Кочрена, Стьюдента, Манна-Уитни, Краскела-Уоллиса, однофакторный дисперсионный анализ, критерий оценки выбирается в соответствии с совокупностью характеристик полученной выборки [3].

Появилась необходимость применения методики статистической обработки экспериментальных данных. Вместо анализа чувствительности откликов, в зависимости от изменения начальных значений параметров эксперимента, предлагается использование статистических критериев оценки однородности разброса и центральных тенденций выборок-откликов на l уровнях эксперимента ($l \geq 2, l \in N$) [3].

Использование статистических критериев для определения чувствительности позволит для метаэвристики (ГА) настроить алгоритм для конкретной задачи, для эвристики (2-opt) – покажет, какие правила дают лучшие результаты на основе оценки разброса и математических ожиданий выборок отклика на l ($l \geq 2$). Если параметров несколько (например, размер популяции и вероятность мутации), используется многофакторный дисперсионный анализ.

В ходе исследования будут рассмотрены отклики системы на изменения индивидуальных параметров алгоритмов (для ГА количество поколений, для 2-opt – итераций), включая суммарную стоимость переналадки оборудования при выполнении заказов и время работы АО, будет определена зависимость времени работы и суммарной стоимости переналадки оборудования от параметра количества поколений (итераций). Также будет рассмотрена зависимость оптимальной стоимости переналадки при замене ГА на алгоритм 2-opt.

Исследование позволит сделать вывод о важности выбора оптимальных параметров алгоритмов и их влиянии на результаты оптимизации в задачах распределения заказов на промышленных предприятиях с целью минимизации итоговой суммарной стоимости переналадки оборудования.

Постановка задачи. Пусть отклик Y представляет собой матрицу размерности $m \times 1$. Для устойчивой оценки дисперсии необходимое количество прогонов АО $m \geq 30$. Малые выборки $m < 10$ дают нестабильные оценки, что искажает анализ чувствительности. Элементы матрицы Y – действительные числа. Предлагается использование статистических критериев для определения чувствительности на основе оценки разброса и математических ожиданий выборок отклика Y на $l \geq 2$ уровнях.

Например, в результате проведения эксперимента получен отклик:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1l} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{NumIter1} & Y_{NumIter2} & \dots & Y_{NumIterl} \end{pmatrix}, NumIter, l \in N,$$

где $NumIter$ – количество запусков на выполнение эксперимента для i-го АО на j-й ЦФ, $NumIter \geq 30$, l – заданное количество уровней эксперимента.

$$Y_{ij} \in R, i = 1, \dots, NumIter, \; j = 1, \dots, l; l, NumIter \in N.$$

Для каждого набора параметров алгоритм запускается несколько раз (например, 30 раз), чтобы оценить стабильность решений. Таким образом, в результате проведения эксперимента для каждого i-го уровня ($i = 1, \dots, l$) получена выборка:

$$\overline{Y_i} = (Y_{1i}, Y_{2i}, \dots, Y_{NumIteri}), \; i = 1, \dots, l, \; l \in N.$$

Необходимо провести статистический анализ полученных экспериментальных данных, отображающих время работы алгоритмов ГА и 2-opt в зависимости от количества исследуемых алгоритмами поколений (итераций): 500, 10000, 20000, 30000, 50000 при решении оптимизационной задачи распределения 40 заказов с целью минимизации итоговой суммарной стоимости переналадки оборудования на рассматриваемом промышленном предприятии.

Приведем проверяемые статистические гипотезы. Обозначим $\theta_{\delta}(Y)$ оценку чувствительности разброса выборки Y. Тогда нулевая гипотеза H_0 – дисперсии l выборок равны, альтернативная гипотеза H_1 – найдутся такие выборки, дисперсии которых различны. Обозначим $\theta_m(Y)$ оценку чувствительности математического ожидания выборки Y. Тогда нулевая гипотеза H_0 – математические ожидания l выборок равны, альтернативная гипотеза H_1 – найдутся такие выборки, математические ожидания которых различны. Оценки характеристик выборки $\theta_{\delta}(Y)$, $\theta_m(Y)$ используются в качестве оценки чувствительности параметров АО случайного поиска к изменению условий проведения эксперимента от уровня к уровню.

Рассматриваемые статистические критерии основаны на вычислении некоторого наблюдаемого значения критерия Y_{nabl} и сравнения его с определенным критическим значением критерия Y_{krit}. В случае $Y_{nabl} < Y_{krit}$ – нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу и поскольку $Y_{nabl} > 0$, $Y_{krit} > 0$, имеем $0 < Y_{nabl} / Y_{krit} < 1$. Иначе – выдвинутая гипотеза отвергается и отношение $Y_{nabl} / Y_{krit} > 1$.

Результат работы статистических критериев будем сохранять в виде $\theta = Y_{nabl} / Y_{krit}$. В результате статистического анализа отклику Y ставится в соответствие пара неотрицательных чисел $\theta_{\delta}(Y)$, $\theta_m(Y)$. При этом чем больше данные значения, тем более чувствителен отклик к изменению параметра. В случае $\theta_{\delta}(Y) > 1$ или $\theta_m(Y) > 1$ – выборки, $Y_j = (Y_{1j}, Y_{2j}, ..., Y_{mj}),\ j = 1, ..., l,\ m \geq 30$, принадлежат различным генеральным совокупностям, АО чувствителен к изменению условий эксперимента от уровня к уровню.

Статистический анализ результатов. Сначала необходимо проверить принадлежности выборок $Y_i, i = 1, ..., l$ нормальной генеральной совокупности. Для проверки гипотезы о нормальном распределении выборки выбраны следующие критерии согласия: χ^2 (Хи-квадрат) Пирсона, λ Колмогорова, ω^2 Мизеса [4], [5]. В качестве результата устанавливаются логические значения статистических критериев.

Методика расчета. Если результаты применения критериев χ^2 Пирсона и λ Колмогорова эквивалентны, т. е. результатом работы обоих критериев является одно и то же логическое значение, на этом статистический анализ оканчивается. В качестве итогового заключения о принадлежности исследуемой выборки нормальной генеральной совокупности выбирается любой из результатов работы статистических критериев χ^2 Пирсона или λ Колмогорова, так как в этом случае они будут эквивалентны.

В случае спора критериев, т. е. при получении различных логических значений результатов работы χ^2 и λ, дополнительно применяется критерий ω^2 Мизеса, результат работы которого принимается в качестве итогового заключения о проверке (таблица 1).

Таблица 1 – Результат проверки с помощью статистических критериев нормальности выборок распределения полученных значений (минимальной стоимости переналадки оборудования) при заданных параметрах для АО

Алгоритм (заказы, параметр) / Критерии	ГА (40, 10000)	ГА (40, 30000)	ГА (40, 50000)	2-opt (40, 500)	ГА (40, 20000)	ГА (40, 500)
Xi_nabl/Xi_krit	2,25 > 1	1,075 > 1	18,756 > 1	3,490 > 1	2,522 > 1	0,513 < 1
Результат работы критерия χ^2 (Пирсона)	false	false	false	false	false	true
L_nabl/L_krit	0,775 < 1	0,197 < 1	0,769 < 1	1,748 > 1	1,738 > 1	0,474 < 1
Результат работы критерия λ (Колмогорова)	true	true	true	false	false	true
Сравнение χ^2(Пирсона) и λ (Колмогорова)	Критерии спорят			Результаты работы критериев эквивалентны		
W_nabl/W_krit	0,683 < 1	0,531 < 1	0,228 < 1	Применения третьего критерия не требуется		
Результат работы критерия ω^2 (Мизеса)	true	true	true			
Результат проверки нормальности	true	true	true	false	false	true

Далее необходимо проверить, (например, с помощью ANOVA), нормально ли распределены данные. По результатам расчетов выборки результатов работы ГА с параметрами ГА(40, 10000), ГА(40, 30000), ГА(40, 50000), ГА(40, 500) принадлежат нормальной генеральной совокупности. Выборки ГА(40, 20000), а также выборка результатов работы алгоритма 2-opt(40, 500) отнесены к генеральной совокупности отличной от нормальной, поэтому для дальнейшего анализа с их участием применяются методы непараметрической статистики (критерии Левене и Краскела-Уоллиса).

Оценка чувствительности разброса. Если количество уровней эксперимента $l = 2$ в параметрическом случае, применяется критерий Фишера, иначе (непараметрическая статистика) – критерий Левене [5]. Если же количество уровней эксперимента $l \geq 3$ в параметрическом случае, применяется критерий Кочрена [3], необходимое дополнительное условие применения которого (равный размер выборок $Y_i, i = 1, ..., l$) выполнено, иначе (непараметрическая статистика) применяется критерий Левене.

Примем H_0 как гипотезу об однородности среднеквадратических отклонений, тогда H_1 – противоположная ей гипотеза о неоднородности среднеквадратических отклонений.

Проведем проверку гипотезы H_0 при помощи критерия Левене (таблица 2).

Таблица 2 – Результат работы критерия Левене определения оценки чувствительности разброса

{Алгоритм (кол-во заказов, параметр)}	Кол-во заказов	*Le_nabl*	*Le_krit*	*Le_nabl/ Le_krit*	Результат
Y_1 = {ГА(40, 20000), ГА(40, 30000), ГА(40, 50000)}	40	11,847	3,014	3,931 > 1	H_0 отклонена
Y_2 = {ГА(40, 30000), ГА(40, 50000), 2-opt (40,500)}	40	15,523	3,014	5,150 > 1	H_0 отклонена
Y_3 = {ГА(40, 10000), ГА(40, 20000), 2-opt(40, 500)}	40	24,014	3,014	7,9671 > 1	H_0 отклонена
Y_4 = {ГА(40, 10000), ГА(40, 20000), ГА(40, 30000), ГА(40, 50000)}	40	14,591	2,623	5,563 > 1	H_0 отклонена
Y_5 = {ГА(40, 10000), ГА(40, 20000), ГА(40, 30000), 2-opt(40, 500)}	40	29,973	2,623	11,427 > 1	H_0 отклонена
Y_6 = {ГА(40, 500), ГА(40, 10000), ГА(40, 20000), ГА(40, 30000), ГА(40, 50000)}	40	39,226	2,390	16,412 > 1	H_0 отклонена
Y_7 = {ГА(40, 500), 2-opt(40, 500)}	40	10,987	3,86	2,847 > 1	H_0 отклонена

Примечание: Le_nabl – наблюдаемое значение критерия Левене, *Le_krit* – критическое значение критерия Левене, *teta_d* – отношение наблюдаемого значения критерия Левене к критическому.

Для оценки чувствительности разброса применен критерий Левене (см. таблицу 2), согласно результатам которого $\theta_\delta(Y_n) \geq 1, n = 1, ..., 7$ все гипотезы об однородности среднеквадратических отклонений отклонены.

Проведем оценку чувствительности разброса по критериям Левене и Краскела-Уоллиса (таблица 3).

Таблица 3 – Результат работы критериев Левене и Краскела-Уоллиса определения оценки чувствительности разброса

{Алгоритм (кол-во заказов, параметр)}	*Le_nabl*	*Le_krit*	*Le_nabl/ Le_krit*	*KU_nabl*	*KU_krit*	*KU_nabl/ KU_krit*	ρ
Y_{s1} = {ГА(40, 20000), ГА(40, 30000), ГА(40, 50000)}	0,517	3,014	0,172 < 1	4081,867	4095	0,997 < 1	1,012 $< \sqrt{2}$
Y_{s2} = {(ГА, 30000), (ГА, 50000), (2-opt, 500)}	22,915	3,014	7,603 > 1	*	*	*	$>\sqrt{2}$
Y_{s6} = {ГА(40, 500), ГА(40, 10000), ГА(40, 20000), ГА(40, 30000), ГА(40, 50000)}	2,057	2,390	0,861 < 1	*	*	*	*
Y_{s7} = {ГА(40, 500), 2-opt(40, 500)}	46,814	3,86	12,128 > 1	*	*	*	$>\sqrt{2}$

Для оценки чувствительности разброса применен критерий Левене (см. табл. 3), согласно результатам которого $\theta_\delta(Y_{s1}) = 0{,}172 < 1$, поэтому нет оснований для отклонения гипотезы об однородности отклонений ГА(40, 20000), ГА(40, 30000), ГА(40, 50000).

Оценка чувствительности математического ожидания. Если количество уровней эксперимента $l = 2$, в параметрическом случае, при условии равенства дисперсий $\theta_\delta(Y) \in (0,1)$, применяется критерий Стьюдента [4], при неравных дисперсиях и в непараметрическом случае применяется критерий Манна-Уитни [5].

Если количество уровней эксперимента $l \geq 3$ в параметрическом случае при условии равенства дисперсий $\theta_\delta(Y) \in (0,1)$, применяется однофакторный дисперсионный анализ [4]. При неравных дисперсиях и в непараметрическом случае применяется критерий Краскела-Уоллиса [5].

Согласно результату $\theta_m(Y_{s1}) = 0,997 < 1$ (см. таблицу 3) нет оснований для отклонения гипотезы об однородности центральных тенденций.

$$\rho_1 = \sqrt{(\theta_\delta(Y_{s1}))^2 + (\theta_m(Y_{s1}))^2} = \sqrt{(0,172)^2 + (0,997)^2} = 1,012 \qquad (1)$$

Согласно (1) расстояние составляет $\rho_1 \approx 1 (\rho_1 < \sqrt{2})$, тогда отклик ГА по значению «Суммарная стоимость переналадки оборудования» низко чувствителен к изменению условий проведения эксперимента параметра «Поколения» от уровня к уровню. Также решение рассматриваемой оптимизационной задачи в разрезе времени работы алгоритма оптимизации высоко чувствительно к выбору самого алгоритма оптимизации: ГА или 2-opt. Однако согласно ранее проведенным исследованиям, чем больше значение параметра «Поколения», тем точнее итоговый результат оптимизации и тем выше время работы ГА в процессе поиска решения рассматриваемой задачи [6].

Таким образом, найденные оценки характеристик выборки $\theta_m(Y)$, $\theta_\delta(Y)$ можно считать показателями различия выборок $Y_i, i = 1, ..., l$ или чувствительностью к изменению условий проведения эксперимента (начальных значений параметров) от уровня к уровню.

Если $\theta_m(Y) \in (0,1)$, $\theta_\delta(Y) \in (0,1)$, выборки $Y_i, i = 1, ..., l$ можно считать принадлежащими одной генеральной совокупности и сделать вывод об отсутствии чувствительности к изменению условий эксперимента от уровня к уровню.

В случае $\theta_m(Y) > 1$ или $\theta_\delta(Y) > 1$ выборки $Y_i, i = 1, ..., l$ принадлежат различным генеральным совокупностям, функция чувствительна к изменению условий эксперимента от уровня к уровню.

Оценка чувствительности математического ожидания в данном случае не требуется, поскольку даже случаи отсутствия оснований для отклонения гипотезы об однородности центральных тенденций оценки расстояний ρ_1 (от начала координат до $\theta_\delta(Y_i), \theta_m(Y_i)$) для исследуемых выборок превышают значение 1:

$$(\forall \theta_m(Y_i) \geq 0)\left[\rho_i = \sqrt{(\theta_\delta(Y_i))^2 + (\theta_m(Y_i))^2} > 1 \mid \theta_\delta(Y_i) > 1\right], i = 1,..,7.$$

Изобразим вариационные ряды, отображающие близкие к оптимальному решения рассматриваемой задачи алгоритмами ГА и 2-opt (рисунок 1).

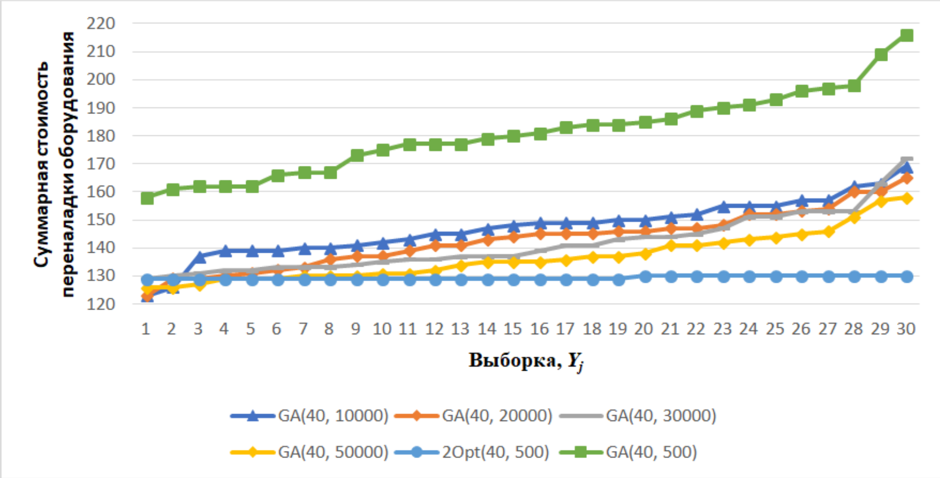

Рисунок 1 – Вариационные ряды, отображающие решения рассматриваемой задачи АО

Зависимость приближенного решения к оптимальному значению в рассматриваемой задаче, то есть суммарное значение стоимости переналадки оборудования, от количества исследуемых алгоритмами поколений (для 2-opt итераций) изображена на рисунке 2.

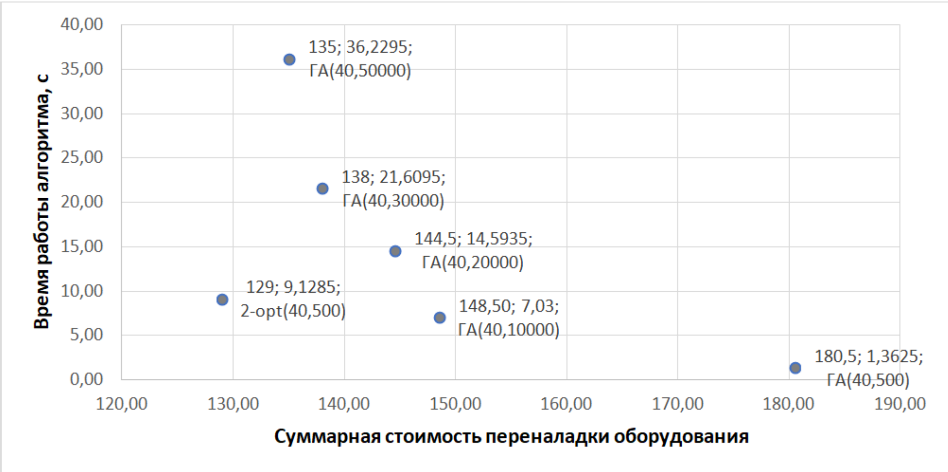

Рисунок 2 – Медианные, приближенные к оптимальному значения стоимости переналадки оборудования и время работы АО в зависимости от количества исследуемых алгоритмами поколений (итераций)

Как следствие имеет место высокая чувствительность параметра ГА «Время работы алгоритма» к изменению условий проведения эксперимента от уровня к уровню, а именно: к изменению параметра «Поколения». Также решение рассматриваемой оптимизационной задачи в разрезе времени работы алгоритма оптимизации высоко чувствительно к выбору самого алгоритма оптимизации: ГА или 2-opt.

Заключение. Анализ чувствительности параметров мета- и эвристических алгоритмов с использованием статистических критериев позволил определить, какие параметры наиболее значимы для поиска приближенного решения, оптимизировать параметры для достижения лучших результатов, сравнить алгоритмы по их устойчивости к изменению параметров.

Параметр популяции ГА был исследован в диапазоне значений от 500 до 50000, в то время как параметр итерации для алгоритма 2-opt составлял 500. Оценка результатов проводилась над решением задачи распределения заказов с минимальной суммарной стоимостью переналадки оборудования.

В ходе исследования были изучены отклики обоих алгоритмов, включая близкие к оптимальному значению стоимости переналадки оборудования и время работы. Была обнаружена значительная зависимость времени работы поиска решения и суммарной стоимости переналадки оборудования ГА от параметра поколения (итерации). Также была изучена зависимость стоимости переналадки оборудования при замене ГА на алгоритм 2-opt, которая также оказалась значительной. Это указывает на различия в подходе данных алгоритмов к решению оптимизационной задачи.

Исследование также показало, что чувствительность оптимальной стоимости переналадки оборудования при изменении параметров поколения ГА на разных уровнях различается. На некоторых уровнях она оказалась высокой, а на других – пограничной между низкой и высокой. В целом, точность решения задачи оптимизации возрастает с увеличением значения параметра поколения, но при этом время решения также увеличивается. Кроме того, увеличения значения параметра поколения для решения оптимизационной задачи становятся менее чувствительными к последующему увеличению параметра поколения. Для алгоритма 2-opt кратное увеличение значения параметра количества итераций не приводит к более точному решению.

Таким образом, исследование позволяет сделать вывод о важности выбора оптимальных параметров алгоритмов и их влиянии на результаты оптимизации в задачах распределения заказов на промышленных предприятиях.

Литература

1. Sohrabi, M. An efficient metaheuristic algorithm for solving combinatorial optimization problems / M. Sohrabi, A. M. Fathollahi-Fard, V. A. Gromov // Autom Remote Control. – 2024. – № 85. – P. 252–262.

2. Englert, M. Worst case and probabilistic analysis of the 2-opt algorithm for the TSP / M. Englert, H. Röglin, B. Vöcking // Algorithmica. – 2014. – № 68. – P. 191–193.

3. Максимей, И. В. Математические основы имитационного моделирования сложных систем / И. В. Максимей ; под ред. О. М. Демиденко ; М-во образования РБ, ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – 243 с.

4. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – М. : Изд-во Юрайт, 2021. – 479 с.

5. Лемешко, Б. Ю. Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей : учеб. пособ. / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – 120 с.

6. Демиденко, О. М. Решение задачи управления порядком выполнения заказов промышленного предприятия / О. М. Демиденко, А. И. Якимов, Е. М. Борчик, Е. А. Якимов, Д. А. Денисевич // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1 (58). – С. 86–92.

Белорусско-Российский университет Поступила в редакцию 13.10.2025