Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

УДК 536.25 *МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ*

А. Н. БОЖИНСКИЙ, С. С. ГРИГОРЯН

О ВНУТРЕННЕМ РАЗОГРЕВЕ И СКОЛЬЖЕНИИ ЛЕДНИКОВ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 22 XII 1972)

Вопросу скольжения ледников по ложу посвящено большое число публикаций; обстоятельный обзор современного состояния вопроса содержится в работе ([1]). В настоящее время существуют три гипотезы относительно возможного механизма скольжения ([1]). В конечном итоге, согласно этим гипотезам, причиной скольжения является уменьшение эффективного трения у ложа ледника, которое обусловлено таянием либо за счет повышения температуры, либо вследствие повышения давления и смещения точки плавления льда. Однако подобные оценки основаны на исследовании процессов локального характера вблизи поверхности контакта ледника с ложем. В данной заметке дается количественное рассмотрение процесса внутреннего разогрева ледника как системы вследствие вязкой диссипации энергии.

Рассмотрим одномерную задачу о медленном безынерционном течении линейно-вязкого несжимаемого слоя под действием силы тяжести по неограниченной наклонной плоскости и о распространении тепла в слое. Уравнение течения в слое и стационарное уравнение теплопроводности имеют вид ([2])

$$\frac{d}{dy}\left(\mu\frac{du}{dy}\right)+\rho g\sin\alpha=0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{du}{dy}\right)^2=0 \tag{2}$$

здесь x, y — декартовы координаты вдоль и по нормали к склону соответственно, u — скорость смещения частиц по оси x, T — абсолютная температура, μ — вязкость, λ — коэффициент теплопроводности, ρ — массовая плотность, g — ускорение силы тяжести, α — угол наклона ложа, h — толщина слоя.

По современным представлениям зависимость $\mu(T)$ имеет вид ([1])

$$\mu=\mu_0\exp(Q/RT), \tag{3}$$

где μ_0 — константа с размерностью вязкости, Q — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная.

Интегрируя уравнение (1) с учетом равенства нулю градиента скорости на свободной поверхности, получим

$$\frac{du}{dy}=(h-y)\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu(T)}. \tag{4}$$

Поскольку разность температур ледника у ложа T_g и на поверхности T_s мала по сравнению с абсолютной температурой, имеет смысл записать уравнение (2) в избыточных температурах $\theta=T-T_s$:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2}+\frac{(\rho g\sin\alpha)^2(h-y)^2}{\lambda\mu(T_s+\theta)}=0. \tag{5}$$

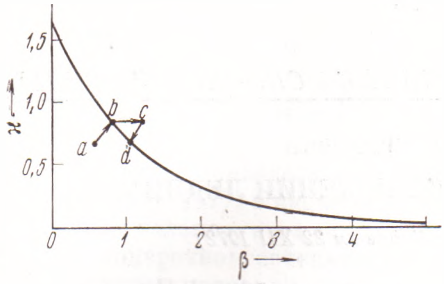

Рис. 1

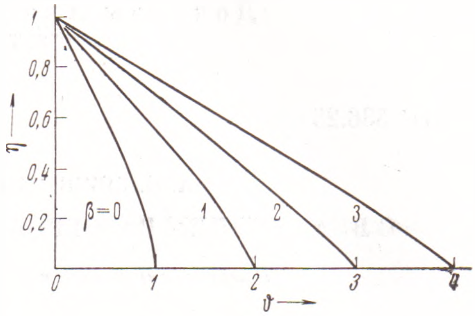

Рис. 2

Учитывая, что $\mu(T_s+\theta)\sim\mu_0\exp\left[\dfrac{Q}{RT_s}\left(1-\dfrac{\theta}{T_s}\right)\right]$ и вводя безразмерные параметры

$$\vartheta=\frac{Q\theta}{RT_s^2},\quad \eta=\frac{y}{h},\quad \varkappa=\frac{h^4(\rho g\sin\alpha)^2Q}{\lambda\mu(T_s)RT_s^2}, \tag{6}$$

приводим (5) к виду

$$\frac{d^2\vartheta}{d\eta^2}+\varkappa(1-\eta)^2e^{\vartheta}=0. \tag{7}$$

Уравнение (7) следует интегрировать при задании температуры T_s на свободной поверхности и геотермического потока тепла $q_g=-\lambda\, dT/dy$ у ложа. В безразмерных переменных граничные условия имеют вид

$$\eta=0,\quad \frac{d\vartheta}{d\eta}=-\beta,\quad \eta=1,\quad \vartheta=0, \tag{8}$$

где $\beta=q_g hQ/(\lambda RT_s^2)$.

Заменой независимой переменной $\xi=(1-\eta)^2$ уравнение (7) сводится к уравнению, хорошо известному в теории стационарного теплового взрыва ([3], [4]); однако граничные условия (8) здесь иные. Идея этой теории состоит в том, что при определенных условиях тепло, развивающееся в теле за счет внутренних источников, не успевает отводиться через граничные стенки и стационарное решение уравнения (7) не существует. Происходит быстрый нестационарный разогрев, приводящий к «взрыву». Подобный подход применялся к исследованию разогрева химически инертных вязких жидкостей с сильной зависимостью вязкости от температуры ([5]). Здесь стационарная теория разогрева используется для объяснения уменьшения трения у ложа вследствие повышения температуры льда.

Нелинейное уравнение (7) интегрировалось численно. Решение строилось методом Рунге — Кутта по заданному значению ϑ_0 при $\eta=0$ и фиксированном $\varkappa$. Полученная зависимость $\varkappa(\vartheta_0)$ имеет максимум. При $\varkappa>\varkappa_{\max}$ решение уравнения (7) не существует. Необходимо подчеркнуть, что в работах ([6], [7]), даже при учете конвективных членов в уравнении теплопроводности, авторы также не обнаружили решения для определенных параметров задачи. Однако этот результат не получил однозначного истолкования и связывался либо с несовместимостью параметров задачи со стационарными условиями, либо с неустойчивостью машинного решения. В действительности наблюдаемый эффект обусловлен нелинейностью уравнения (7). Если разложить e^{ϑ} в ряд и ограничиться линейным приближением, то указанный эффект не имеет места. Кривая, ограничивающая область существования решения, приводится на рис. 1 и хорошо аппроксимируется уравнением $\varkappa=1{,}63\cdot(2{,}3)^{-\beta}$. Распределение температуры по тол-

Таблица 1

Ледник, горная система	Источник	h, м	$\sin\alpha$	T_s, °K	$\mu(T_s)$, пз	u_s, м/год	u_g, м/год	β	$\varkappa$	$\varkappa_{нейт}$	Движение
Сэлмон, Скалистые горы	([8])	550	0,030	273	10^{14}	75	35	1,89	43	0,33	+
Атабаска, Скалистые горы	([9, 10])	250	0,060	273	10^{14}	50	40	0,88	7,3	0,80	+
Юнгфрауфирн, Альпы	([11])	140	0,080	273	10^{14}	35	17	0,48	1,27	1,10	+
Мейген, Аркт. Канада	([12])	100	0,013	255	10^{15}	1	0	0,39	0,001	1,17	—
Мезерв, Антарктида	([13])	200	0,050	245	$3\cdot10^{15}$	3	0	0,87	0,085	0,80	—
Джан-Куат, Кавказ	([14])	85	0,220	273	10^{14}	30	—	0,31	1,31	1,27	+
Хинтерайсфернер, Альпы	([1, 15])	224	0,066	273	10^{14}	50	45	0,76	5,7	0,85	+

Примечание. В последней графе знак «плюс» означает скольжение, знак «минус» — прилипание.

щине ледника на «взрывном» пределе при различных значениях параметра β показано на рис. 2.

Механизм скольжения ледников может быть описан следующим образом. Пусть параметры ледника отвечают точке a на рис. 1. Такой ледник течет с прилипанием у ложа, температура льда у ложа ниже точки плавления. Предположим, что под влиянием внешних возмущений параметры $\varkappa_a$, β_a изменились и ледник перешел в состояние b, отвечающее условиям разогрева. Температура льда у ложа резко возрастает, и по достижении точки плавления ледник начинает скользить. Таким образом, условие теплового «взрыва» означает возможность скольжения ледника по ложу. Вопрос о существовании стационарного состояния ледника со скольжением приводит к другой задаче, в которой выполнено условие $T_g=T_{пл}$. Поскольку после разогрева температура у ложа изменилась, то ледник перейдет в точку c. В результате внешних воздействий возможно также возвращение ледника на нейтральную кривую в точку d. По существу нейтральная кривая разделяет ледники на «теплые» и «холодные», причем под «теплыми» следует понимать ледники, температура льда которых у ложа равна точке плавления льда; обратный случай отвечает «холодным» ледникам. Полученное решение показывает, что наиболее важными параметрами, характеризующими скольжение ледников, являются толщина и угол наклона ложа. Именно роль этих параметров в скольжении ледников подчеркивалась ранее многими исследователями ([1]). Приводимая таблица параметров (табл. 1) некоторых горных ледников иллюстрирует удовлетворительное согласие настоящей теории с результатами наблюдений. При вычислении $\varkappa$, β принимались следующие значения параметров ([1]): $\lambda=5\cdot10^{-3}$ кал/(см·сек·град), $Q=20$ ккал/(град·моль), $\rho=0{,}9$ г/см^3, $q_g=40$ кал/(см^2·год).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 18 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. А. Шумский, Динамическая гляциология. Итоги науки, изд. АН СССР, 1969. [2] Л. И. Седов, Введение в механику сплошной среды, М., 1962. [3] Д. А. Франк-Каменецкий, ЖФХ, 13, 6 (1939). [4] В. В. Барзыкин, А. Г. Мержанов, ДАН, 120, № 6, 1271 (1958). [5] С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов, С. И. Худяев, ДАН, 163, № 1, 133 (1965). [6] L. Lliboutry, J. Glaciology, 7 (51), 363 (1968). [7] W. F. Budd, D. Jenssen, V. Radok, Univ. Melbourn, Meteorology Dep. Publ., № 18 (1971). [8] W. H. Mathews, J. Glaciology, № 26, 448 (1959). [9] W. S. B. Paterson, ibid, 10, № 60, 339 (1971). [10] C. F. Raymond, ibid., 10, № 58, 55 (1971). [11] J. A. F. Gerrard, M. F. Perutz, A. Roch, Proc. Roy. Soc. A, 213, № 1115, 546 (1952). [12] W. S. B. Paterson, J. Glaciology, 8, № 54 (1969). [13] G. Holdsworth, ibid., 8, № 52 (1969). [14] А. П. Мартышев, Матер. гляц. иссл., № 18 (1971). [15] С. В. Калесник, Очерки гляциологии, М., 1963.