Известия Гомельского государственного университета
имени Ф Скорины, № 6 (153), 2025

Математика

УДК 519.21 EDN: NSNDWC

Стационарное распределение сетей с требованиями разного типа и экспоненциальным ограничением на время пребывания

Ю.В. Малинковский, С.Ю. Евмененко, В.А. Немилостивая

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с однолинейными узлами, в которой на время пребывания требований в узлах наложено экспоненциальное ограничение. В системе допускается наличие нескольких типов требований. По истечении допустимого времени пребывания требование мгновенно и независимо от других покидает текущий узел и переходит в другой в соответствии с заданной матрицей маршрутизации, которая, вообще говоря, отличается от матрицы маршрутизации для успешно обслуженных требований. Внешний поток поступающих требований предполагается простейшим. В работе доказывается существование единственного стационарного (предельного) распределения вероятностей состояний сети, имеющего форму произведения. Кроме того, устанавливается свойство нечувствительности: при фиксированных первых моментах (математических ожиданиях) распределений длительностей обслуживания стационарное распределение не зависит от конкретного вида этих распределений.
Ключевые слова: теория массового обслуживания, стохастические процессы, теория вероятностей, сети Джексона с ограничением на время пребывания, BCMP сети.

We consider an open queuing network with single-server nodes, exponential impatience (i. e., exponential time limits on customers' sojourn times in nodes), and multiple customer classes. Upon expiration of their allowed sojourn time in a node, customers instantly and independently of others leave the node and are routed according to a routing matrix that, in general, differs from the routing matrix used for successfully served customers. External arrivals follow a Poisson process. We prove the existence and uniqueness of a stationary (limiting) distribution of the network state, which admits a product-form solution. Moreover, we establish the insensitivity property: provided the first moments (i. e., the means) of the service time distributions are fixed, the stationary distribution is independent of the specific forms of these distributions.
Keywords: queuing theory, stochastic processes, probability theory, Jackson networks with sojourn time constraints, BCMP networks.

Введение. СеМО с ограничением на время пребывания позволяют моделировать реальные системы, где важно учитывать временные ограничения. Анализ таких систем помогает оптимизировать процессы, минимизировать потери и повышать эффективность работы. В [1], [2] получены результаты для сетей Джексона с ограничением на время пребывания.

В работе [3] для открытой СеМО с дисциплиной обслуживания LCFS Preemptive Resume доказана инвариантность стационарного распределения по отношению к распределениям длительностей обслуживания при фиксированных первых моментах, когда распределение времен пребывания требований в узлах является экспоненциальным. В [4] доказана инвариантность стационарного распределения для открытых и замкнутых СеМО с обходами узлов требованиями. Ранее Гомельской школой по мультипликативным сетям был получен результат по инвариантности стационарного распределения для СеМО с отрицательными требованиями [5].

В настоящей работе рассматривается открытая сеть массового обслуживания, в которой на время пребывания требований в узлах наложено экспоненциальное ограничение, в то время как длительность обслуживания требований имеет произвольное распределение. Исследуется стационарное распределение состояний такой сети и доказывается следующий ключевой результат: при фиксированных первых моментах (математических ожиданиях) времени обслуживания в каждом узле стационарное распределение вероятностей состояний сети не зависит от конкретного вида распределений длительностей обслуживания.

Марковский случай. В сеть массового обслуживания, образованную N однолинейными узлами, поступает стационарный пуассоновский поток с интенсивностью λ. Поступающее требование независимо от других направляется в i-й узел и становится требованием типа l с вероятностью $p_{0(i,l)}$ $\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} p_{0(i,l)} = 1\right)$. Число мест для ожидания бесконечно. Предполагается, что промежутки времени между моментами поступления требований извне в сеть, времена их обслуживания и времена их пребывания в узлах суть взаимно независимые между собой случайные величины.

Состояние сети будем описывать вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, где $x_i = \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}\right)$ – вектор переменной размерности, а x_{ij} $\left(1 \le j \le n_i, 1 \le x_{ij} \le M, n_i = 0,1,\ldots\right)$ – это тип требования, которое занимает j-ое место в очереди i-го узла. Первым обслуживается требование x_{in_i}, остальные ожидают в очереди. Последним на прибор попадет требование x_{i1}. Причем $x_i = 0$ если $n_i = 0$, т. е. система пустая.

Будем использовать обозначения $p(x)$ – вероятность того, что в момент времени t состояние сети $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$; $[\tilde{x}_i]$ – вектор, все компоненты которого совпадают с вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, а i-ая компонента равна $\tilde{x}_i$; $\left[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\right]$ – вектор, все компоненты которого совпадают с вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, а i-ая и j-ая компоненты равны $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$. Введём также операторы $\mathrm{T}: \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}\right) \to \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i-1}\right)$ и $\mathrm{K}_l: \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}\right) \to \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}, l\right)$.

Длительности обслуживания требований в узлах имеют произвольную функцию распределения $B_i(t)$, причем математическое ожидание фиксировано с помощью равенства

$$\mu_i^{-1} = \int_0^\infty \left[1 - B_i(t)\right] dt. \tag{1}$$

При рассмотрении марковского случая будем предполагать, что время обслуживания требования единственным прибором i-го узла имеет показательное распределение с параметром $\mu_i (i = \overline{1, N})$, т. е. $B_i(t) = 1 - \exp\{-\mu_i t\} (t > 0)$. В таком случае процесс x(t) представляет собой однородный марковский процесс с непрерывным временем.

Длительность пребывания требования в i-ом узле – случайная величина, имеющая показательное условное распределение с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}\left(i = \overline{1, N}\right)$ при условии, что в i-м узле находится n_i требований. Иначе говоря, условная вероятность того, что пребывание требования в i-м узле прекратится в промежутке времени $[t, t+h)$, если в момент t в узле находилось n_i требований, равна $\frac{\nu_i}{n_i} h + o(h)$ при $h \to 0$, а условная вероятность завершения пребывания хотя бы одного из этих требований равна $\nu_i h + o(h)$. Если требование прибывает в свободный узел, оно сразу начинает обслуживаться. Если требование поступает в узел, в котором уже есть требование, то оно выбивает требование, находящееся на приборе, и сразу же начинает обслуживаться, а выбитое с прибора требование становится в начало очереди (дисциплина LCFS Preemptive Resume).

Требование типа l, завершившее обслуживание в i-м узле, моментально и независимо от других требований переходит в j-й узел сети и становится требованием типа m с вероятностью $p_{(i,l)(j,m)}$, а с вероятностью $p_{(i,l)0}$ покидает сеть $\left(i, j = \overline{1, N},\ l, m = \overline{1, M}, \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{(i,l)(j,m)} + p_{(i,l)0} = 1\right)$.

Требование типа l, время пребывания которого в i-м узле завершилось моментально и независимо от других требований, переходит в j-й узел и становится требованием типа m с вероятностью $r_{(i,l)(j,m)}$, а с вероятностью $r_{(i,l)0}$ покидает сеть $\left(i, j = \overline{1,N},\ l,m = \overline{1,M},\ \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} r_{(i,l)(j,m)} + r_{(i,l)0} = 1\right)$. Для удобства введём ещё узел 0, отождествляющий внешность сети. Введём также две стохастические матрицы: $P = \left(p_{(i,l)(j,m)}\right)$ $\left(i, j = \overline{0,N},\ l,m = \overline{0,M}\right)$ и $R = \left(r_{(i,l)(j,m)}\right)$ $\left(i, j = \overline{0,N},\ l,m = \overline{0,M}\right)$, где $p_{(0,0)(0,0)} = r_{(0,0)(0,0)} = 0,$ $p_{(0,0)(i,l)} = r_{(0,0)(i,l)} = r_{0(i,l)} = p_{0(i,l)}$, которые можно рассматривать как матрицы перехода марковских цепей, состояния которых обозначаются парами (i,l). Матрица P является матрицей маршрутизации обслуженных требований, а R – матрицей маршрутизации неудовлетворенных требований.

Стохастическая матрица маршрутизации, которая управляет движением требований по узлам $i = \overline{0,N}$, без учёта того, за счёт чего требование покидает сеть (обслуживание или окончание длительности пребывания) $S = \left(s_{(i,l)(j,m)}\right), \left(i, j = \overline{0,N},\ l,m = \overline{0,M}\right)$, где для $(i,l) \neq 0$ $s_{0(j,m)} = p_{0(j,m)}$, $s_{(i,l)(j,m)} = \dfrac{\mu_i p_{(i,l)(j,m)} + \nu_i r_{(i,l)(j,m)}}{\mu_i + \nu_i} = \dfrac{\mu_i}{\mu_i + \nu_i} p_{(i,l)(j,m)} + \dfrac{\nu_i}{\mu_i + \nu_i} r_{(i,l)(j,m)}$, $i = \overline{1,N}$.

Рассмотрим изолированно от сети i-й узел, полагая, что в него поступает M независимых пуассоновских потоков требований интенсивности $\lambda\varepsilon_{i,l}$, $l = \overline{1,M}$. В остальном, касающемся процессов обслуживания и ограничениях на длительность пребывания, поведение изолированного узла такое же, как и в сети. Система аналогична BCMP системе первого типа с интенсивностью поступления $\lambda\sum_{l=1}^{M}\varepsilon_{i,l}$, и интенсивностью обслуживания $\mu_i + \nu_i$. Получим уравнения равновесия для такого узла:

$$p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}\right)\left(\lambda\sum_{l=1}^{M}\varepsilon_{i,l} + \mu_i + \nu_i\right) = \left(\mu_i + \nu_i\right)\sum_{l=1}^{M} p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}, l\right) + \lambda\varepsilon_{i,x_{in_i}} p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i - 1}\right),$$
$$i = \overline{1,N},\ n_i = 1,2,\ldots \tag{2}$$

Уравнения локального баланса имеют вид:

$$\begin{gathered} p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}\right)\left(\lambda\sum_{l=1}^{M}\varepsilon_{i,l}\right) = \left(\mu_i + \nu_i\right)\sum_{l=1}^{M} p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}, l\right), \\ p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}\right)\left(\mu_i + \nu_i\right) = \lambda\varepsilon_{i,x_{in_i}} p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i - 1}\right), \quad l = \overline{1,M}, i = \overline{1,N}, n_i = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{3}$$

Для эргодичности цепи Маркова $x_i = \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}\right)$, описывающей изолированный узел, необходимо чтобы загрузка i-ого узла $\rho_i = \dfrac{\lambda}{\mu_i + \nu_i}\varepsilon_{i,x_{il}} < 1, \quad i = \overline{1,N}.$ Не трудно убедиться, что

$$\begin{gathered} p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}\right) = \frac{\lambda^{n_i}}{\left(\mu_i + \nu_i\right)^{n_i}}\prod_{\kappa=1}^{n_i}\varepsilon_{ix_{i\kappa}} p_i(0), \quad n_i = 1,2,..., \\ p_i(0) = \left[\sum_{n_i=0}^{\infty}\prod_{\kappa=1}^{n_i}\left(\varepsilon_{ix_{i\kappa}}\frac{\lambda}{\mu_i + \upsilon_i}\right)\right]^{-1}. \end{gathered} \tag{4}$$

является нетривиальным решением уравнений глобального равновесия. Таким образом, $p_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}\right)$ является стационарным распределением цепи Маркова $x_i = \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in_i}\right)$.

Требования при прохождении узлов не рождаются и не теряются, то в стационарном режиме с точностью до множителя λ (на который можно сократить) выполняется следующий закон сохранения:

$$\varepsilon_{i,l} = p_{0(i,l)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\varepsilon_{j,m}s_{(j,m)(i,l)}, \quad i=\overline{1,N}, \quad l=\overline{1,M}. \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon_{i,l}$ – средняя интенсивность поступления требований типа l в i-й узел, когда сеть находится в стационарном режиме.

Будем предполагать, что уравнение (5), которое назовём уравнением трафика, будет иметь единственное положительное решение. Это выполнимо, если матрица $S=\left(s_{(i,l)(j,m)}\right),\left(i, j=\overline{0,N}, l, m=\overline{0,M}\right)$ является переходной матрицей неприводимой цепи Маркова.

Лемма 1. При выполнении уравнения трафика (5) выполняется

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\varepsilon_{i,l}\frac{\mu_i p_{(i,l)0}+\nu_i r_{(i,l)0}}{\mu_i+\nu_i}=1. \tag{6}$$

Доказательство. Суммируя (5) по $i=\overline{1,N}$ и $l=\overline{1,M}$, получим

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\varepsilon_{i,l} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}p_{0(i,l)} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\varepsilon_{j,m}s_{(j,m)(i,l)}\right) = 1+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\varepsilon_{j,m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}s_{(j,m)(i,l)}\right) =$$

$$=1+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\varepsilon_{j,m}\left(1-s_{(j,m)0}\right)\right) = 1+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\varepsilon_{j,m} - \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\varepsilon_{j,m}s_{(j,m)0},$$

Физический смысл (6) состоит в том, что (5), умноженное на λ, выражает равенство интенсивностей выходящего из сети и входящего в неё потоков.

Пусть $p(x)=p(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ предельное эргодическое распределение сети, которое в таком случае будет единственным решением уравнений глобального равновесия

$$\begin{gathered}p(x)\left[\lambda+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\left(\mu_i\left(1-p_{(i,l)(i,l)}\right)+\nu_i\left(1-r_{(i,l)(i,l)}\right)\right)\mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}\right]= \\ =\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}p\left(\left[\mathrm{K}_l(x_i)\right]\right)\left(\mu_i p_{(i,l)0}+\nu_i r_{(i,l)0}\right)+\lambda\sum_{i=1}^{N}p_{0\left(i,x_{in_i}\right)}p\left(\left[\mathrm{T}(x_i)\right]\right)+ \\ +\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}p\left(\left[\mathrm{K}_l(x_i);\mathrm{T}(x_j)\right]\right)\left(\mu_i p_{(i,l)\left(j,x_{j,n_j}\right)}+\nu_i r_{(i,l)\left(j,x_{j,n_j}\right)}\right)\mathrm{I}_{\left\{(i,l)\neq\left(j,x_{j,n_j}\right)\right\}}.\end{gathered} \tag{7}$$

Получим уравнения локального равновесия. Для получения первого уравнения приравняем между собой слагаемые левой и правой части (7), отвечающие за интенсивность потока вероятности из состояния $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ за счёт поступления требований в сеть извне и интенсивность потока вероятности в состояние $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ за счёт ухода требований из сети:

$$\lambda p(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}p\left(\left[\mathrm{K}_l(x_i)\right]\right)\left(\mu_i p_{(i,l)0}+\nu_i r_{(i,l)0}\right) \tag{8}$$

остальные уравнения локального равновесия получаются из (7) приравниванием интенсивностей потока вероятности из состояния $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ за счёт ухода требований из i-го узла и потока вероятности в состояние $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ за счёт поступления требований в i-й узел:

$$\begin{gathered}p(x)\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\left(\mu_i\left(1-p_{(i,l)(i,l)}\right)+\nu_i\left(1-r_{(i,l)(i,l)}\right)\right)=\lambda p_{0\left(i,x_{in_i}\right)}p\left(\left[\mathrm{T}(x_j)\right]\right)+ \\ +\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}p\left(\left[\mathrm{K}_l(x_i);\mathrm{T}(x_j)\right]\right)\left(\mu_i p_{(i,l)\left(j,x_{j,n_j}\right)}+\nu_i r_{(i,l)\left(j,x_{j,n_j}\right)}\right)\mathrm{I}_{\left\{(i,l)\neq\left(j,x_{j,n_j}\right)\right\}}, \quad j=\overline{1,N};\end{gathered} \tag{9}$$

Не сложно убедиться, что $p(x)=p(x_1,x_2,\dots x_N)=p_1(x_1)p_2(x_2)...p_N(x_N)$, где $p_i(x_i)$ – стационарное распределение изолированного i-го узла, является решением локальных уравнений равновесия (8) и (9), а следовательно и уравнения (7). Теперь докажем, что условие

$$\frac{\lambda}{\mu_i+\nu_i}\varepsilon_{i,x_{il}}<1,\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,M}, \tag{10}$$

является достаточным условие эргодичности цепи Маркова $x(t)$. Для этого воспользуемся одним из вариантов теоремы Фостера: для того, чтобы неприводимая консервативная регулярная цепь Маркова с непрерывным временем была эргодической, достаточно, чтобы существовало ненулевое нетривиальное нормированное решение системы уравнений равновесия $\{p(x)\}$ такое, что

$$\sum_{x\in X}|p(x)|<\infty.$$

Поскольку интенсивности выхода из состояний $q(x)=\lambda+\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_i\left(1-p_{(i,l)(i,l)}\right)+\nu_i\left(1-r_{(i,l)(i,l)}\right)\right)$ ограничены, то цепь регулярна. Ранее уже говорилось, что рассматриваемая цепь неприводима. Консервативность сети также очевидна. Выше установлено, что $p(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)...p_N(x_N)$ является решением уравнений равновесия. Теперь проверим абсолютную сходимость ряда:

$$\sum_{x\in X}|p(x)|=\sum_{x\in X}\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda^{n_i}}{(\mu_i+\nu_i)^{n_i}}\prod_{\kappa=1}^{n_i}\varepsilon_{ix_{i\kappa}}p_i(0)\right)=\sum_{x\in X}\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda^{n_i}}{(\mu_i+\nu_i)^{n_i}}\prod_{\kappa=1}^{n_i}\varepsilon_{ix_{i\kappa}}p_i(0)\right).$$

При выполнении условия эргодичности (10) ряд будет сходиться. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. При выполнении условия (10) цепь Маркова $x(t)$ *эргодична, а её единственное стационарное распределение имеет форму произведения* $p(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)...p_N(x_N)$, *где* $p_i(x_i)$ *– стационарное распределение изолированного* i*-го узла, а* $\{\varepsilon_{i,l},\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,M}\}$ *– решение уравнения трафика (5).*

Немарковский случай. Теперь будем предполагать, что времена обслуживания требований в узлах имеют произвольную функцию распределения $B_i(t)$, причем математическое ожидание фиксированно с помощью (1). В этом случае процесс $x(t)$ не является марковским. Далее докажем, что для такого процесса справедлива следующая теорема

Теорема 2. При выполнении условия (10) случайный процесс $x(t)$ *имеет финальное строго положительное распределение в форме произведения* $p(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)...p_N(x_N)$, *где* $p_i(x_i)$ *– финальное распределение изолированного* i*-го узла, а* $\{\varepsilon_{i,l},\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,M}\}$ *– решение уравнения трафика (5).*

Доказательство. Пусть τ_{ik} – остаточное время обслуживания требования в i-м узле с момента t до момента окончания времени обслуживания, а $\tau_i(t)=\left(\tau_{i1}(t),\tau_{i2}(t),...,\tau_{in_i}(t)\right)$ – вектор, описывающий, остаточное время пребывания требований в i-м узле; где k-номер позиции, на которой находится требование от «хвоста» очереди к прибору. Поскольку, вообще говоря, $x(t)$ не является марковским процессом, рассмотрим марковский процесс $\varsigma(t)=\left(x(t),\tau(t)\right)$, добавляя к $x(t)$ непрерывную компоненту $\tau(t)=\left(\tau_1(t),\tau_2(t),...,\tau_N(t)\right)$. Пусть выполнено условие $\frac{\lambda}{\mu_i+\nu_i}\varepsilon_{i,x_{il}}<1,\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,M}$, т. е. в случае, когда x(t) – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $x(t)$, а, следовательно, в общем случае и процесса $\varsigma(t)$, так как $\varsigma(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент. Введем обозначение

$$F(x(t),y)=F(x(t),y_{11},...,y_{1n_1},y_{21},...,y_{2n_2},...,y_{N1},...,y_{Nn_N})=$$
$$=\lim_{t\to\infty}P\left\{x(t)=x,\tau_{i1}(t)<y_{i1},...,\tau_{in_i}(t)<y_{in_i},i=\overline{1,N}\right\}.$$

Тогда для $F(x,y)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$\lambda F(x,y)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\left(\frac{\partial F\left(x,[y_{i1},...,y_{in_i-1},0]\right)}{\partial y_{in_i}}-\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{in_i}}\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}F(x,y)\nu_iB_i(y_{in_i})=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}F([T(x_i)],[y_{i1},...,y_{in_i-1}])\lambda p_{0(i,x_{in_i})}B_i(y_{in_i})+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial F([K_l(x_i)],[y_{i1},...,y_{in_i},0])}{\partial y_{in_i+1}}p_{(i,l)0}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}F([K_l(x_i)],[y_{i1},...,y_{in_i},+\infty])\nu_ir_{(i,l)0}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial F([K_l(x_i);T(x_j)],[y_{i1},...,y_{in_i},0;y_{j1},...,y_{jn_j-1}])}{\partial y_{in_i+1}}p_{(i,l)(j,x_{jn_j})}B_j(y_{jn_j})\mathrm{I}_{\left\{(i,l)\neq\left(j,x_{j,n_j}\right)\right\}}+ \quad (11)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}F([K_l(x_i);T(x_j)],[y_{i1},...,y_{in_i},+\infty;y_{j1},...,y_{jn_j-1}])\nu_ir_{(i,l)(j,x_{jn_j})}B_j(y_{jn_j})\mathrm{I}_{\left\{(i,l)\neq\left(j,x_{j,n_j}\right)\right\}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial F([x_{i1},...,x_{in_i-1},l],[y_{i1},...,y_{in_i-1},0])}{\partial y_{in_i}}p_{(i,l)(i,l)}B_i(y_{in_i})+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}F([x_{i1},...,x_{in_i-1},l],[y_{i1},...,y_{in_i-1},+\infty])\nu_ir_{(i,l)(i,l)}B_i(y_{in_i}).$$

Разобьем уравнение (11) на уравнения локального равновесия

$$\lambda F(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial F([K_l(x_i)],[y_{i1},...,y_{in_i},0])}{\partial y_{in_i+1}}p_{(i,l)0}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}F([K_l(x_i)],[y_{i1},...,y_{in_i},+\infty])\nu_ir_{(i,l)0}, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\left(\frac{\partial F\left(x,[y_{i1},...,y_{in_i-1},0]\right)}{\partial y_{in_i}}-\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{in_i}}\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}F(x,y)\nu_iB_i(y_{in_i})-$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial F([x_{i1},...,x_{in_i-1},l],[y_{i1},...,y_{in_i-1},0])}{\partial y_{in_i}}p_{(i,l)(i,l)}B_i(y_{in_i})-$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}F([x_{i1},...,x_{in_i-1},l],[y_{i1},...,y_{in_i-1},+\infty])\nu_ir_{(i,l)(i,l)}B_i(y_{in_i})=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}F([T(x_i)],[y_{i1},...,y_{in_i-1}])\lambda p_{0(i,x_{in_i})}B_i(y_{in_i})+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}F([K_l(x_i);T(x_j)],[y_{i1},...,y_{in_i},+\infty;y_{j1},...,y_{jn_j-1}])\nu_ir_{(i,l)(j,x_{jn_j})}B_j(y_{jn_j})\mathrm{I}_{\left\{(i,l)\neq\left(j,x_{j,n_j}\right)\right\}}+ \quad (13)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\frac{\partial F([K_l(x_i);T(x_j)],[y_{i1},...,y_{in_i},0;y_{j1},...,y_{jn_j-1}])}{\partial y_{in_i+1}}p_{(i,l)(j,x_{jn_j})}B_j(y_{jn_j})\mathrm{I}_{\left\{(i,l)\neq\left(j,x_{j,n_j}\right)\right\}}.$$

Нетрудно убедиться, что неотрицательным абсолютно непрерывным по y решением уравнений (12), (13), а следовательно, и уравнения (11) является

$$F(x,y)=p(x)\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{n_i}\mu_i\int_0^{y_{ik}}\left[1-B_i(u)\right], \quad (14)$$

где $p(x)$ – стационарная вероятность состояния x в марковском случае. Действительно, подставляя (14) в (12), поделив обе части полученного уравнения на $F(x,y)$ и умножив на $p(x)$, получим первое уравнение локального равновесия для марковского случая (8). Затем подставив (14) в (13), поделив обе части полученного уравнения на $F(x,y)B_i(y_{in_i})$ и умножив на $p(x)\int_0^{x_{in_i}}\left[1-B_i(u)\right]du,$ получим второе уравнение локального равновесия для марковского случая (9). Таким образом теорема 2 доказана.

Заключение. В статье, посвящённой открытым СеМО с однолинейными узлами, требованиями нескольких типов и экспоненциальным ограничением на время обслуживания требований в узлах, исследовано стационарное распределение и доказано, что стационарное распределение не зависит от функциональной формы распределения длительностей обслуживания требований в узлах при условии, что первые моменты этих распределений фиксированы.

Таким образом, использование полученных результатов в процессе проектирования и модернизации информационно-вычислительных сетей и сетей передачи данных позволяет не только повысить их технические характеристики, но и создать более устойчивую и надежную инфраструктуру для будущих нужд и требований.

Литература

1. Малинковский, Ю. В. Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания / Ю. В. Малинковский // АиТ. – 2015. – № 4. – С. 67–79.

2. Малинковский, Ю. В. Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания / Ю. В. Малинковский // АиТ. – 2017. – № 10. – С. 155–167.

3. Малинковский, Ю. В. Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания / Ю. В. Малинковский, С. Ю. Евмененко // АиТ. – 2024. – № 9. – С. 93–100.

4. Малинковский, Ю.В. Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона-Ньюэлла / Ю. В. Малинковский // АиТ. – 1998. – № 9. – С. 29–36.

5. Довженок, Т. С. Инвариантность стационарного распределения сетей с обходами и отрицательными заявками / Т. С. Довженок // АиТ. – 2002. – № 9. – С. 97–110.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 16.10.2025