Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (153), 2025

УДК 512.542 EDN: NVKXRJ

К теории $\mathfrak{H}_\sigma$-критических формаций конечных групп

И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь

Изучается вопрос о существовании у всякой σ-локальной формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций или, иначе, $\mathfrak{H}_\sigma$-критических формаций, где σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, $\mathfrak{H}$ – σ-локальная формация. Доказано, что если $\mathfrak{H}$ – σ-локальная формация классического типа, то у всякой σ-локальной формаций $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, существует по меньшей мере одна $\mathfrak{H}_\sigma$-критическая формация. Обобщен ряд результатов о существовании минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций.

Ключевые слова: конечная группа, формационная σ-функция, σ-локальная формация, критическая σ-локальная формация, формация классического типа.

The question of the existence of minimal σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations or, in other words, $\mathfrak{H}_\sigma$-critical formations for any σ-local formation $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ is studied, where σ is some partition of the set of all prime numbers, $\mathfrak{H}$ is a σ-local formation. It is proved that if $\mathfrak{H}$ is a σ-local formation of classical type, then in any σ-local formation $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ there exists at least one $\mathfrak{H}_\sigma$-critical formation. A number of results on the existence of minimal local non-$\mathfrak{H}$-formations are generalized.

Keyword: finite group, formation σ-function, σ-local formation, critical σ-local formation, classical type formation.

Введение. В теории формаций конечных групп изучение и классификация формаций неразрывно связаны с исследованием вопросов наличия или отсутствия у изучаемой формации подформаций того или иного вида. Поскольку решетка подформаций любой неединичной локальной формации континуальна, то при изучении структурного строения такой формации довольно затруднительно применение индуктивных рассуждений. Данное обстоятельство привело к необходимости разработки специальных методов исследования локальных формаций, связанных с понятием критической формации. В частности, при изучении структурного строения локальных формаций важную роль играют минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации [1] или, иначе, $\mathfrak{H}_l$-критические формации [2], т. е. такие локальные формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Общая задача изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [1]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А.Н. Скибой в цикле работ 1980–1993 гг., завершающим результатом которого стало описание $\mathfrak{H}_l$-критических формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа [3] (т. е. формация $\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны), а также доказано существование $\mathfrak{H}_l$-критических формаций у всякой локальной формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Результаты теории $\mathfrak{H}_l$-критических формаций широко использовались в вопросах классификации локальных формаций, при исследовании их структурного строения, а также при изучении несократимых факторизаций ограниченных и однопорожденных локальных формаций [4], [5].

Развитие теории σ-свойств групп [6], [7] и их классов, в частности, теории σ-локальных формаций [8]–[20], привело к необходимости изучения и классификации σ-локальных формаций, в том числе, развитию теории критических σ-локальных формаций [13], [17], [20]. При этом, следуя [1], [2], *минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma$-критической формацией* называют [13] σ-локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные σ-локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Изучение $\mathfrak{H}_\sigma$-критических формаций начато в работах [13], [17], где основным результатом является решение задачи Л.А. Шеметкова (1980 г.) об описании критических формаций в классе σ-локальных формаций, т. е. описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа. Следуя [2], σ-локальную формацию $\mathfrak{H}$ мы называем *σ-локальной формацией классического типа*, если $\mathfrak{H}$ имеет такое σ-локальное определение, все неабелевы значения которого σ-локальны. Результаты о критических σ-локальных формациях с успехом использовались [20] при изучении σ-локальных формаций с ограниченным $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом.

В данной работе, на основе результатов работ [13], [17], изучается вопрос о существовании минимальных σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формаций у всякой σ-локальной формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Основным результатом работы является

Теорема А. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{H}$ – произвольная σ-локальная формация классического типа. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация.*

Мы докажем теорему А в разделе 2 и приведем некоторые следствия этого результата.

1. Базовые определения и вспомогательные результаты. Основные определения, обозначения и ряд свойств σ-локальных формаций представлены в работах [6]–[20]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Если n целое число, G – группа и $\mathfrak{F}$ – класс групп, то $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \sigma(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$, $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\sigma(G)$.

Группу G называют [7] σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого i; σ-нильпотентной, если $G = G_1 \times \cdots \times G_t$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, \ldots, G_t$; σ-разрешимой, если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор G является σ-примарным.

Отметим, что класс всех σ-разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, а через $\mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ-нильпотентных групп. Класс всех единичных групп обозначают через (1).

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группу G называют Π-группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают класс всех Π-групп, а через $\mathfrak{N}_\Pi$ – класс всех σ-нильпотентных Π-групп. В частности, если $\Pi = \{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i-групп, а $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ_i'-групп. Символом $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$ обозначают $(\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}\mathfrak{G}_{\sigma_i})$-радикал группы G (наибольшую нормальную $(\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}\mathfrak{G}_{\sigma_i})$-подгруппу группы G), т. е. $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = G_{\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$.

Функцию f вида $f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}$ называют *формационной σ-функцией*. Для всякой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является *σ-локальной*, а f – *σ-локальное определение* $\mathfrak{F}$.

Формационную σ-функцию f называют *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i. Если f – полная внутренняя формационная σ-функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то f называют *каноническим σ-локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l_\sigma\text{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, и называют σ-локальной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F} = l_\sigma\text{form}(G)$ для некоторой группы G, то $\mathfrak{F}$ называют однопорожденной σ-локальной формацией.

Для всякого класса групп $\mathfrak{F}$ и всякого $\sigma_i \in \sigma$ полагают

$$\mathfrak{F}(\sigma_i) = \begin{cases} (G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & \text{если } \sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *минимальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}$-критической формацией*, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$. Принято σ-локальную формацию $\mathfrak{F}$ называть *минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma$-критической формацией* [13], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные σ-локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – некоторый непустой набор подклассов $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = (1)$ для любого $j_1 \neq j_2$ из J. Если, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_t}$, где $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$ для некоторого $j_1, \ldots, j_t \in J$, то пишут, что $\mathfrak{F} = \oplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_t$, если $J = \{1, \ldots, t\}$). Представление формации $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \oplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ (см. [5, с. 171]) называют *прямым разложением* формации $\mathfrak{F}$.

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся следующие известные факты теории формаций.

Лемма 1.1 [10, лемма 2.1]. *Пусть f и h – формационные σ-функции и пусть* $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Тогда:

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. *Следовательно, $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией;*

(3) *Если каждая группа из $\mathfrak{F}$ является σ-разрешимой, то* $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{S}_\Pi$;

(4) *Если $\sigma_i \in \Pi$, то* $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$;

(5) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, *где F – единственная формационная σ-функция, такая что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i.*

Лемма 1.2 [10, теорема 1.13]. *Множество S_n^σ всех n-кратно σ-локальных формаций образует подполугруппу полугруппы всех формаций $G\mathfrak{G}$. Кроме того, $|S_n^\sigma| = 2^{\aleph_0}$ для каждого σ с $|\sigma| > 1$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является минимальным идемпотентом в S_n^σ для всех $n > 0$ и $i \in I$.*

Лемма 1.3 [15, лемма 3.2]. *Пусть $\sigma_i \in \sigma$, $1 \neq P$ – σ_i-группа, A – группа с $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $G = P \wr A = K \rtimes A$ – регулярное сплетение групп P и A, где K – база сплетения G. Тогда $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K$.*

Лемма 1.4 [12, лемма 11]. *Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и $G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 1.5 [17, теорема A]. *Пусть $\mathfrak{H}$ – σ-локальная формация классического типа и H – ее каноническое σ-локальное определение. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P$ – простая σ_i-группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;

2) P – не σ-примарная группа и $P = G^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;

3) $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ и либо $\Phi(K) = 1$ и $K^{H(\sigma_j)} \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$, либо K – минимальная не $H(\sigma_i)$-группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$; б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$; в) циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$.

Группа называется π-замкнутой, если она имеет нормальную холлову π-подгруппу.

Лемма 1.6 [21, лемма 4.4]. *Пусть $K \subseteq N \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, $K \subseteq \Phi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если N / K π-замкнута, то и N π-замкнута;

2) $F_p(N / K) = F_p(N) / K$.

Лемма 1.7 [3, лемма 8] *Во всякой неабелевой формации имеется, по крайней мере, одна минимальная неабелева подформация.*

Лемма 1.8 [4, лемма 18.13]. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная неабелева формация, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(G)$, где G – одна из следующих групп:* 1) *ненильпотентная монолитическая группа с таким монолитом P, что $P \not\subseteq \Phi(G)$ и факторгруппа G / P абелева*; 2) *группа кватернионов порядка 8*; 3) *неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p.*

Лемма 1.9 [13, теорема 3.1]. *Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, где G – такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической.*

Лемма 1.10 [4, следствие 19.14]. *Тогда и только тогда группа нильпотентна, когда в формации, ею порожденной, наследственны все подформации.*

Лемма 1.11 [4, лемма 18.8]. *Если в группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и $O_p(G) = 1$ (p – некоторое простое число), то существует точный неприводимый F_pG-модуль, где F_p – поле из p элементов.*

2. Основной результат. Установим вначале справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$ и $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \varnothing\}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.1(1) имеем $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \varnothing\}$. Поскольку формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является наследственной, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ и по лемме 1.1(5) имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всякого $\sigma_i \in \Pi$. Поэтому $\mathfrak{N}_\Pi = \oplus_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_i \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, то мы имеем искомое равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы А. Рассмотрим вначале случай, когда $\sigma(\mathfrak{F}) \not\subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \sigma(\mathfrak{H})$. Тогда ввиду леммы 1.1 формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \not\subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку формация (1) всех единичных групп является единственной собственной σ-локальной подформацией $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $(1) \subseteq \mathfrak{H} \neq \varnothing$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$.

Далее будем считать, что $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Пусть f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$, H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$. Положим $\Sigma := \{\sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}) \mid f(\sigma_j) \not\subseteq H(\sigma_j)\}$. Поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то $\Sigma \neq \varnothing$. Сопоставим со всяким $\sigma_j \in \Sigma$ группу A_j, являющейся группой минимального порядка из $f(\sigma_j) \setminus H(\sigma_j)$. Пусть $\mathfrak{L} = \{A_j \mid \sigma_j \in \Sigma\}$. Пусть $B = A_i$ – группа, имеющая наименьший порядок среди групп множества $\mathfrak{L}$. Пусть Q – монолит группы B. По условию $\mathfrak{H}$ имеет такое σ-локальное определение h, каждое непустое значение которого является либо абелевой, либо σ-локальной формацией. Не теряя общности, можно считать, что σ-локальное определение h внутреннее. Поскольку $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то в силу леммы 1.1 $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i) \neq \varnothing$. Следовательно, $h(\sigma_i) \not\simeq \varnothing$.

Пусть $h(\sigma_i)$ – σ-локальная формация. Тогда в силу леммы 1.2 формация $H(\sigma_i)$ также является σ-локальной. Поскольку ввиду леммы 1.1(2) формация $H(\sigma_i)$ является насыщенной формацией, то $Q \not\subseteq \Phi(B)$.

Предположим, что Q – не σ-примарная группа. Тогда $\Phi(B) = 1$ и $O_{\sigma_j', \sigma_j}(B) = 1$ при всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$. Допустим, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ и пусть $p \in \sigma_i$. По лемме 1.11 существует точный неприводимый $F_p B$-модуль K. Пусть $G = K \rtimes B$. Ввиду леммы 1.3 $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K$. Поскольку $G / O_{\sigma_i}(G) = G / K \simeq B \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.4. Значит, $\mathfrak{M} = l_\sigma \mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$. По выбору B – группа минимального порядка из $f(\sigma_i) \setminus H(\sigma_i)$ и $Q = B^{H(\sigma_i)}$. Поскольку $B \in \mathfrak{F}$, то $B \simeq B / O_{\sigma_j', \sigma_j}(B) \in f(\sigma_j)$ для любого $\sigma_j \in \sigma(Q)$. Значит, $B^{H(\sigma_j)} = 1 \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$. Если теперь $K = G^{\mathfrak{H}}$, то $\mathfrak{M}$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$ по лемме 1.5(3). Пусть $G / K \notin \mathfrak{H}$. Тогда $B \notin \mathfrak{H}$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{X} = l_\sigma \mathrm{form}(B)$. Ввиду нашего предположения $B^{\mathfrak{H}} = Q$. Допустим, что существует такое $\sigma_r \in \sigma(Q)$, что $B / Q \notin H(\sigma_r)$. Так как $B \in \mathfrak{F}$ и $O_{\sigma_r', \sigma_r}(B) = 1$, то $B \in f(\sigma_r)$. Таким образом, $B / Q \in f(\sigma_r) \setminus H(\sigma_r)$. Так как при этом $|B / Q| < |B|$, то последнее противоречит определению группы B. Значит, $B^{H(\sigma_r)} = Q$ для всякого $\sigma_r \in \sigma(Q)$. Тогда $\mathfrak{X}$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$ по лемме 1.5(2). Предположим теперь, что $\sigma_i \in \sigma(Q)$. Пусть $\mathfrak{B} = l_\sigma \mathrm{form}(B)$. Ясно, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $B^{H(\sigma_i)} = Q$, то $B / Q \in \mathfrak{H}$. Если допустить, что $B \in \mathfrak{H}$, то $B \simeq B / O_{\sigma_i', \sigma_i}(B) \in H(\sigma_i)$. Это противоречит определению группы B. Значит, $Q = B^{\mathfrak{H}}$. Как и выше, можно показать, что $B^{H(\sigma_r)} = Q$ для всякого $r \in \sigma(Q)$. Значит, группа B удовлетворяет условию (2) леммы 1.5. Поэтому $\mathfrak{B}$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$.

Пусть Q – σ-примарная группа, т. е. σ_j-группа для некоторого j. Тогда $O_{\sigma_j', \sigma_j}(B) = O_{\sigma_j}(B)$. Поскольку $Q = B^{H(\sigma_i)}$ и $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i)$, то $j \neq i$. Пусть $p \in \sigma_i$. По лемме 1.11 существует точный неприводимый $F_p B$-модуль K. Пусть $G = K \rtimes B$. Тогда $K = O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)$ по лемме 1.3. Поскольку $G / K = G / O_{\sigma_i}(G) \simeq B \in f(\sigma_i)$ и f – внутреннее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ в силу леммы 1.4. Поэтому $\mathfrak{D} = l_\sigma \mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что группа G удовлетворяет условию (3) леммы 1.5.

Допустим, что $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $B \simeq G / K = G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in H(\sigma_i)$, что противоречит определению группы B. Значит, $G \notin \mathfrak{H}$. Если $B \notin \mathfrak{H}$, то в силу леммы 1.4 имеем $B / O_{\sigma_j}(B) \notin H(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $Q \subseteq O_{\sigma_j}(B)$, то $|B / O_{\sigma_j}(B)| < |B|$. Так как σ-функция f внутренняя, то $B \in \mathfrak{F}$ и $B / O_{\sigma_j', \sigma_j}(B) \in f(\sigma_j)$. Значит, для некоторого $j \neq i$ имеем

$$B / O_{\sigma_j', \sigma_j}(B) \in f(\sigma_j) \setminus H(\sigma_j).$$

Следовательно, в $\mathfrak{L}$ имеется группа меньшего порядка чем $|B|$. Последнее противоречит выбору группы B. Поэтому $B \in \mathfrak{H}$ и значит, $K = G^{\mathfrak{H}}$. Кроме того, ввиду выбора группы B

имеем $Q = B^{H(\sigma_i)}$. Значит, группа G удовлетворяет условию (3) леммы 1.5. Поэтому $\mathfrak{D}$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $h(\sigma_i)$ – абелева формация. Если $Q \not\subseteq \Phi(B)$, то рассуждая также как и в случае, когда $h(\sigma_i)$ – σ-локальная формация мы покажем, что в формации $\mathfrak{F}$ найдется минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация.

Пусть $Q \subseteq \Phi(B)$. Поскольку $B/Q \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i)$ и B – группа минимального порядка из $f(\sigma_i) \setminus H(\sigma_i)$, то $T/Q := (B/Q)^{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Так как $Q \subseteq \Phi(B)$, то по лемме 1.6 группа T является σ_i-замкнутой. Значит, если $|T/Q| \neq 1$, то $O_{\sigma_i}(T) \neq 1$. Поскольку $O_{\sigma_i}(T)$ – характеристическая подгруппа группы T и T нормальна в B, то $O_{\sigma_i}(T)$ – нормальная подгруппа группы B. Но B – монолитическая группа с монолитом Q. Следовательно, $Q \subseteq O_{\sigma_i}(T)$, т. е. Q – σ_i-группа. Последнее невозможно, так как Q – σ_j-группа и $j \neq i$. Таким образом, $|T/Q| = 1$. Но тогда $B/Q \in h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{N}$. Поскольку формация $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп насыщенна и $Q \subseteq \Phi(B)$, то B – нильпотентная q-группа, где $q \notin \sigma_i$.

Пусть B – неабелева группа и $\mathfrak{M} = \mathrm{form}(B)$. Тогда $\mathfrak{M}$ неабелева формация. Значит, по лемме 1.7 в $\mathfrak{M}$ имеется минимальная неабелева подформация $\mathfrak{R}$. Так как $Q \subseteq \Phi(B)$, то в силу леммы 1.8 имеем $\mathfrak{R} = \mathrm{form}(X)$, где X либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q. По лемме 1.11 в каждом из этих случаев существует точный неприводимый F_pX-модуль R, где $p \in \sigma_i$. Пусть $G = R \rtimes X$. Тогда $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = R$. Поскольку $G/O_{\sigma_i}(G) = G/R \simeq X \in \mathrm{form}(B) \subseteq f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.4. Следовательно, $\mathfrak{T} = l_\sigma \mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{T}$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация. Ввиду лемм 1.5 для этого достаточно доказать, что $R = G^{\mathfrak{H}}$. Покажем, что $X \in \mathfrak{H}$. Поскольку $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то в силу леммы 2.1 имеют место включения $\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}$. Но X нильпотентна, а значит, и σ-нильпотентна. Поэтому $G/R \simeq X \in \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{H}$. Допустим, что $G \in \mathfrak{H}$. Тогда

$$X \simeq G/R = G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i).$$

Так как X – q-группа и $q \notin \sigma_i$, то $X \in h(\sigma_i)$. Но в рассматриваемом случае формация $h(\sigma_i)$ абелева. Полученное противоречие показывает, что $G \notin \mathfrak{H}$. Следовательно, $R = G^{\mathfrak{H}}$.

Ввиду леммы 1.10 формация $\mathrm{form}(B)$ является наследственной. Поэтому $\mathrm{form}(B) = \mathrm{form}(B)$. Ввиду выбора группы B, она является минимальной не $H(\sigma_i)$-группой. Следовательно, все собственные подгруппы группы B принадлежат абелевой формации $h(\sigma_i)$.

Пусть X – группа кватернионов порядка 8. Все собственные подгруппы группы X являются абелевыми группами экспоненты, делящей 4. Так как $X \in \mathrm{form}(B)$, то экспонента группы X является делителем экспоненты группы B. Значит, X – минимальная не $H(\sigma_i)$-группа. В силу леммы 1.5(3) формация $\mathfrak{T}$ является искомой $\mathfrak{H}_\sigma$-критической формацией.

Пусть X – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q. Тогда все собственные подгруппы группы X являются абелевыми группами экспоненты q. Поскольку $X \in \mathrm{form}(B)$, то экспонента группы X является делителем экспоненты группы B. Следовательно, X – минимальная не $H(\sigma_i)$-группа. Поэтому в силу леммы 1.5(3) формация $\mathfrak{T}$ является искомой минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией.

Пусть B – абелева группа. Тогда B – абелева q-группа, где $q \in \sigma_j$. Пусть $p \in \sigma_i$. Ввиду леммы 1.11 существует точный неприводимый F_pB-модуль R. Пусть $G = R \rtimes B$. Тогда $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = R$. Поскольку $G / O_{\sigma_i}(G) = G / R \simeq B \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.4. Значит, $\mathfrak{M} = l_\sigma \mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Заметим, что $R = G^{\mathfrak{H}}$. Действительно, если $G \in \mathfrak{H}$, то $B \simeq G / R = G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in H(\sigma_i)$, что противоречит выбору группы B. Поэтому $R = G^{\mathfrak{H}}$. Кроме того, поскольку по выбору группы B она является минимальной не $H(\sigma_i)$-группой. Поэтому по лемме 1.5(3) формация $\mathfrak{M}$ является искомой минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией. Теорема доказана.

Напомним [10], что формацию называют 2-кратно σ-локальной, если она имеет такое σ-локальное определение, все непустые значения которого σ-локальные формации.

Следствие 2.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{H}$ – произвольная 2-кратно σ-локальная формация. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация.*

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$ – формация всех σ-нильпотентных групп. Всякую минимальную σ-локальную не $\mathfrak{N}_\sigma$-формацию называют *минимальной σ-локальной не σ-нильпотентной формацией*. Ввиду примера 1.2(iv) [10] $\mathfrak{N}_\sigma = LF_\sigma(h) = LF_\sigma(H)$, где $h(\sigma_i) = (1)$ и $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i-групп, для всех i. Поэтому $\mathfrak{N}_\sigma$ – σ-локальная формация классического типа. Следовательно, из теоремы А получаем

Следствие 2.5 [20, следствие 3.9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ не σ-нильпотентная σ-локальная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная не σ-нильпотентная σ-локальная формация.*

Пусть теперь $\mathfrak{H}$ – произвольная собственная неединичная σ-локальная подформация из $\mathfrak{N}_\sigma$. Тогда ввиду [20, лемма 3.3] имеет место равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. Согласно [17, лемма 2.1] имеем $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n) = LF_\sigma(N)$, где n и N, соответственно, наименьшее и каноническое σ-локальные определения формации $\mathfrak{N}_\Pi$. При этом, $n(\sigma_i) = (1)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$, $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $N(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Значит, $\mathfrak{N}_\Pi$ – σ-локальная формация классического типа. Поэтому из теоремы А получаем

Следствие 2.6 [20, теорема 3.8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие σ-локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация.*

Пусть $\mathfrak{H}$ – формация всех групп с σ-нильпотентным коммутантом. Тогда в силу примера 1.2(v) [10] формация $\mathfrak{H}$ совпадает с произведением $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, где $h(\sigma_i) = \mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп. Поэтому $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$ – σ-локальная формация классического типа. Следовательно, из теоремы А имеем

Следствие 2.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$ – формация всех групп с σ-нильпотентным коммутантом. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная σ-локальная не $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$-формация.*

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\sigma$ – формация всех σ-разрешимых групп. Всякую минимальную σ-локальную не $\mathfrak{S}_\sigma$-формацию называют *минимальной σ-локальной не σ-разрешимой формацией*. Ввиду [10, замечание 2.4] $\mathfrak{S}_\sigma = LF_\sigma(H)$, где $H(\sigma_i) = \mathfrak{S}_\sigma$ для всех i. Поэтому $\mathfrak{S}_\sigma$ – σ-локальная формация классического типа. Значит, из теоремы А вытекает

Следствие 2.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная не σ-разрешимая формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная σ-локальная не σ-разрешимая формация.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ из теоремы A получаем

Следствие 2.9 [3, следствие 1]. *Пусть формации* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *локальны и* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. *Если* $\mathfrak{H}$ *является формацией классического типа, то в* $\mathfrak{F}$ *имеется по крайней мере одна* $\mathfrak{H}_l$ *-критическая формация.*

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328).

Литература

1. Шеметков, Л. А. Экраны ступенчатых формаций / Л. А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп. – Киев : Наукова думка, 1980. – С. 37–50.

2. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Изв. АН БССР. – 1980. – № 4. – С. 27–33.

3. Скиба, А. Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев : Ин-т матем. АН Украины, 1993. – С. 258–268.

4. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 256 с.

5. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Бел. навука, 1997. – 240 с.

6. Skiba, A. N. On σ-properties of finite groups I / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 34 (4). – С. 89–96.

7. Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – V. 436. – P. 1–16.

8. Skiba, A. N. On one generalization of the local formations / A. N. Skiba // Probl. Phys., Math., Tech. – 2018. – № 34 (1). – P. 79–82.

9. Chi, Z. On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Probl. Phys., Math., Tech. – 2018. – № 34 (2). – P. 85–88.

10. Chi, Z. On n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

11. Tsarev, A. Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Art.: 75.

12. Safonova, I. N. On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups / I. N. Safonova, V. G. Safonov // Журнал Бел. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2020. – № 3. – С. 1–14.

13. Сафонова, И. Н. О минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.

14. Воробьев, Н. Н. Отделимые решетки кратно σ-локальных формаций / Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько, А. О. Ходжагулыев // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 4. – С. 721–735.

15. Safonova, I. N. Some properties of n-multiply σ-local formations of finite groups / I. N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – Art.: 2250138.

16. Safonova, I. N. A criterion for σ-locality of a non-empty formation. / I. N. Safonova // Communications in Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376.

17. Сафонова, И. Н. О критических σ-локальных формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.

18. Safonova, I. N. On the τ-closedness of n-multiply σ-local formation / I. N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – P. 123–136.

19. Сафонова, И. Н. О n-кратной σ-локальности непустой τ-замкнутой формации конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 32–38.

20. Сафонова, И. Н. О σ-локальных формациях конечных групп с ограниченным $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 41–62.

21. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 271 с.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 13.08.2025