Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

УДК 528.21 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

А. Л. ВЕЛИКОВИЧ, академик Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

1. В общем виде обратная задача теории потенциала формулируется следующим образом: задано значение гравитационного потенциала на поверхности S некоторого объема G; требуется найти плотность ρ внутри G. Хорошо известно, что в таком виде задача является некорректно поставленной, в частности, ее решение существенно неоднозначно. В самом деле, взяв любую функцию $\varphi'=0$ вне G и $\varphi'\neq 0$ внутри G, получим, что $\Delta\varphi'$ дает то распределение плотности, которое может быть добавлено к найденному ранее частному решению и дает новое решение с тем же старым потенциалом снаружи. Единственность решения возможна лишь при некоторых предположениях относительно ρ; для широкого класса таких предположений она доказана в [1]. Наиболее простой и важной для приложений является такая постановка: требуется найти форму тела заданной плотности по известному потенциалу на границе некоторого объема, содержащего тело. Для тел, звездных относительно одной из внутренних точек (поверхность которых можно задать в виде $r=r(\theta, \varphi)$), хорошо известны единственность [2] и устойчивость [3] решения; разработан и конкретный метод численного решения таких задач [4].

В данной работе рассматривается несколько иной подход. Грубо говоря, неоднозначность решения обратной задачи обусловлена высокими гармониками ρ — возможностью строить из них конфигурации нулевого внешнего потенциала; естественно попытаться сгладить решение — это легче всего достигается с помощью вариационного принципа. Предлагается найти частное решение обратной задачи, подчиненное определенному вариационному условию, и использовать полученное решение для оценки либо даже для расчета формы тела, если плотность задана, или вообще распределения плотности.

2. Выберем вариационный принцип в виде $\delta\int\limits_G F[\Phi]d^3x=0$ при заданном Φ вне G. Наложим на функционал F естественные условия скалярности и квадратичности по Φ и всем производным Φ (чтобы уравнения Эйлера получились линейными) — это весьма сузит класс функционалов; наиболее интересны случаи $F[\Phi]=(\Delta\Phi)^2$ и $F[\Phi]=(\nabla\Delta\Phi)^2$. Переходя согласно уравнению Пуассона к $\rho=\mathrm{const}\cdot\Delta\Phi$, мы получим:

1)

$$\delta\int\limits_G \rho^2\, d^3x=0, \tag{1}$$

причем на S известны Φ и первые производные Φ, которые по непрерывности можно вычислить, зная Φ вне G. Вариационное условие (1) имеет смысл минимизации отклонения плотности от средней. Кстати, соответствующему уравнению Эйлера

$$\Delta\rho=0 \tag{2}$$

подчиняется «эффективное» распределение масс, создающее внешний потенциал. Это следует из леммы П. С. Новикова [2]: для того чтобы плотность μ создавала вне области G нулевой потенциал, необходима и достаточна ортогональность μ ко всем функциям, гармоническим в G (в смысле скалярного произведения $(f, g)=\int\limits_G f(x)g(x)\,d^3x$; G предполагается ограниченной). Отсюда сразу вытекает единственность решения, подчиненного условиям (1), (2) (и не менее 1 порядка гладкости), и его существование, если решение вообще существует.

2)

$$\delta\int\limits_G(\nabla\rho)^2\,d^3x=0, \tag{3}$$

на S должны быть известны значения Φ, первых и вторых производных Φ. Все они берутся из внешних условий, кроме второй производной по нормали, терпящей разрыв на границе; разумно выбрать ее таким образом, чтобы плотность ρ на S принимала заданные значения. Уравнение Эйлера

$$\Delta\Delta\rho=0. \tag{4}$$

Условия (3), (4) означают требование максимальной гладкости ρ. Они позволяют задать на поверхности S две измеримые величины — Φ и ρ — и в этом смысле определяют лучшую, нежели (1), (2), модель истинной плотности.

3. Для случаев, когда область G достаточно простая, легко сразу написать частные решения обратной задачи, воспользовавшись методом Фурье.

Пусть, например, G — шар радиуса R; потенциал на границе $\Phi(R, \theta, \varphi)=Y_l^m(\theta, \varphi)$, т.е. $\Phi(r, \theta, \varphi)\,|_{r>R}=(R/r)^{l+1}Y_l^m(\theta, \varphi)$. Имея в виду условия (2), возьмем $\Phi(r, \theta, \varphi)\,|_{r<R}$ в виде

$$\Phi=(\alpha r^l+\beta r^{l+2})\,Y_l^m(\theta, \varphi)$$

и найдем α и β из условий непрерывности Φ и $\partial\Phi/\partial r$ при $r=R$. Искомое $\rho=(4\pi k)^{-1}\Delta\Phi$, k — гравитационная постоянная. Для общего случая $\Phi(R, \theta, \varphi)=f(\theta, \varphi)$ можно написать в развернутом виде:

$$\rho(r, \theta, \varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{(2l+1)(2l+3)}{8\pi^2R^{l+2}(1+\delta_{0m})}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}f(\theta', \varphi')\,Y_l^m(\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\right]r^lY_l^m(\theta, \varphi).$$

Аналогичным образом решается задача и для условия (4), только теперь нужно взять $\Phi(r, \theta, \varphi)\,|_{r<R}=(\alpha r^l+\beta r^{l+2}+\gamma r^{l+4})\,Y_l^m(\theta, \varphi)$ и найти α, β и γ из двух условий непрерывности и равенства (m, l) фурье-компоненты $\rho(R, \theta, \varphi)$ заданному значению.

Тем же путем можно получить простые формулы для важного случая, когда G — полупространство $z<0$. Можно сказать, что рассматривается аномалия силы тяжести на фоне среднего потенциала (и средней плотности) Земли, которую в малом масштабе заменяют полупространством, т.е. в дальнейшем плотность и масса — избыточные величины над некоторым средним уровнем. Пусть используется условие (2) и

$$\partial\Phi/\partial z\,|_{z=0}=\exp(ikx+ily).$$

Тогда $\Phi(x, y, z)\,|_{z>0}$ — гармоническая функция, ограниченная на бесконечности,— выписывается сразу:

$$\Phi=-\frac{1}{\sqrt{k^2+l^2}}\exp(ikx+ily-\sqrt{k^2+l^2}\,z)$$

Взяв по аналогии $\Phi|_{z<0}=(\alpha+\beta z)\exp(ikx+ily+\sqrt{k^2+l^2}z)$ и подбирая α и β из условий непрерывности Φ и $\partial\Phi/\partial z$ при $z=0$, найдем

$$\rho=\frac{\sqrt{k^2+l^2}}{\pi k}\exp(ikx+ily+\sqrt{k^2+l^2}\,z),$$

т.е. в случае существования интеграла Фурье

$$\rho(x,y,-z)=-\frac{1}{\pi k}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi(x,y,z),\quad z>0. \tag{5}$$

Для выполнения условия (4) возьмем

$$\Phi|_{z<0}=(\alpha+\beta z+\gamma z^2)\exp(ikx+ily+\sqrt{k^2+l^2}z)$$

и найдем α, β и γ из условий непрерывности и равенства плотности на границе заданному значению $\tau(x,y)$. Легко получаем

$$\rho=\frac{1}{\pi k}\left(\sqrt{k^2+l^2}+\sqrt{k^2+l^2}\,\gamma z+\frac{\gamma}{2}\right)\exp(ikx+ily+\sqrt{k^2+l^2}\,z).$$

Т.е., когда интеграл Фурье существует, то

$$\rho(x,y,-z)=R(x,y,z)-2z\frac{\partial}{\partial z}R(x,y,z)-\frac{1}{\pi k}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi(x,y,z), \tag{6}$$

где R – функция, гармоническая при $z>0$, ограниченная на бесконечности и принимающая при $z=0$ значения

$$R(x,y,0)=\tau(x,y)+\frac{1}{\pi k}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi(x,y,z)|_{z=0}.$$

Формула (6) упрощается, если считать $\tau=0$ (т.е. предположить, что аномалия локализована ниже поверхности, не выходит на нее). Тогда (6) перейдет в

$$\rho(x,y,-z)=\frac{1}{2\pi k}z\frac{\partial^3}{\partial z^3}\Phi(x,y,z),\quad z>0. \tag{7}$$

4. Несмотря на простоту формул (5)–(7), они непригодны для непосредственного применения к гравиметрическим задачам: не существует решения ρ, гармонического или бигармонического при $z<0$ и отвечающего конечной ненулевой массе $0<\int\limits_{z<0}\rho\,d^3x<\infty$, в чем можно убедиться непосредственным интегрированием; формулы (5)–(7) пригодны для полей типа, например, диполя.

Избавиться от возникшей расходимости можно, изменив вариационное условие. Например, так:

$$\delta\int\limits_G[(\Delta\Phi)^2+\mu^2(\nabla\Phi)^2]d^3x=0,\quad (\Delta-\mu^2)\rho=0. \tag{8}$$

Такие решения достаточно быстро убывают на бесконечности и при больших μ вообще стремятся к финитным. С условием (8) уже можно описывать конечные аномалии; в частности, можно получить известные формулы для массы M и координат ξ, η и ζ центра масс аномалии ([5]):

$$M=\frac{1}{2\pi k}\int\limits_{z=0}\frac{\partial\Phi}{\partial z}dx\,dy,\quad M\xi=\frac{1}{2\pi k}\int\limits_{z=0}x\frac{\partial\Phi}{\partial z}dx\,dy,$$

$$M\eta=\frac{1}{2\pi k}\int\limits_{z=0}y\frac{\partial\Phi}{\partial z}dx\,dy,\quad M\zeta=\frac{1}{6\pi k}\int\limits_{z=0}\left(\Phi+x^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)dx\,dy. \tag{9}$$

Но сами интегральные представления значительно более громоздки, чем (5)—(7).

В обычной постановке задачи (найти форму тела заданной плотности ρ_0) можно применить (5) или (6), (7) таким образом. По формулам (9) определяем массу и положение центра масс аномалии, после чего помещаем в этот центр центр шара данной плотности и нужной массы (либо центр массы другого подходящего тела из используемых в практической гравиметрии — цилиндр, полушарие и т.п.), т.е. имеем плотность

$$\rho_1(r,\theta,\varphi)=\begin{cases}\rho_0, & r<R=\left(\dfrac{3M}{4\pi\rho_0}\right)^{1/3},\\ 0, & r>R;\end{cases} \qquad (10)$$

будем теперь подразумевать под аномалией ρ отклонение плотности (10) от истинной. Это безмассовая аномалия, все интегралы Фурье существуют, т.е. формулы (5)—(7) применимы.

Можно предложить несколько способов определения формы аномалии по полученному решению. Вот простейшие и, по-видимому, наиболее естественные: 1) выбрать в данном решении поверхность $\rho=\rho_0$ и считать ее границей аномалии; 2) взять в качестве границы поверхность $\rho=\mathrm{const}$, выбирая const так, чтобы поверхность ограничивала объем $V=M/\rho_0$ (это точнее, чем 1), но сложнее в смысле вычислений); 3) предполагая поверхность аномалии звездной относительно ее центра масс, вычислим по полученному ρ мультипольные моменты до порядка l и будем искать поверхность S тела G в виде

$$r(\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{l}\sum_{m=-k}^{k}\alpha_{mk}Y_k{}^m(\theta,\varphi)$$

(разумно, видимо, ограничиться $l=2$, но в принципе точность ничем не лимитирована). В результате получится система нелинейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой — интегралы от производных сферических функций — не зависят от задачи и могут быть найдены сразу. Так как такие системы обычно решаются итерационными методами, то, оценив искомое решение (хотя бы способом 1) или 2)), можно получить хорошее начальное приближение, т.е. быструю сходимость вычислений.

Кстати, вычисление моментов может пригодиться и для проверки задачи на самосогласованность в случае, когда величина ρ_0 заранее не известна. Например, квадрупольные моменты имеют порядок Ma^2, где a — характерный размер системы, т.е., ограничив сверху a, мы получим ограничение снизу на ρ_0.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
6 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Прилепко, ДАН, 171, № 1, 51 (1966). [2] П. С. Новиков, ДАН, 18, № 3, 165 (1938). [3] А. Н. Тихонов, ДАН, 39, № 5, 195 (1943). [4] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 5, № 3, 465 (1965). [5] Г. А. Гамбурцев, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 4, 207 (1938).