

Перемещения при изгибе в несимметричной круговой пятислойной пластине

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, В.С. САЛИЦКИЙ

Рассмотрена задача о нахождении перемещений в пятислойной круговой несимметричной по толщине пластине под действием осесимметричной нагрузки. Центральный и внешние слои предполагаются несущими, тонкими, повышенной жесткости. Они воспринимают основную часть силовой нагрузки. Деформирование несущих слоев подчиняется гипотезам Кирхгофа. Для связи этих слоев используются два относительно толстых легких заполнителя. Деформирование заполнителей соответствует гипотезам Тимошенко. Система дифференциальных уравнений равновесия пластины получена с помощью вариационного метода Лагранжа. Общее решение системы выписано в конечном виде. Численно исследована зависимость полученных решений от материала внешнего несущего слоя при действии равномерно распределенной нагрузки.

Ключевые слова: круговая пятислойная пластина, асимметрия по толщине, изгиб, аналитическое решение, численные результаты.

The paper considers the problem of finding displacements in a five-layer circular plate that is not symmetrical in thickness under an axisymmetric load. The central and outer layers are assumed to be load-bearing, thin, and highly rigid. They carry the main part of the force load. The deformation of the load-bearing layers follows Kirchhoff's hypotheses. Two relatively thick, lightweight fillers are used to connect these layers. The deformation of the fillers follows Timoshenko's hypotheses. The system of differential equations of plate equilibrium is obtained using the Lagrangian variational method. The general solution of the system is written out in its final form. The dependence of the obtained solutions on the material of the outer bearing layer under the action of a uniformly distributed load is numerically investigated.

Keywords: five-layer circular plate, thickness asymmetry, bending, analytical solution, numerical results.

Введение. В связи с возрастающими требованиями современной промышленности и строительства к прочности и материалоемкости элементов конструкций резко усилился спрос на использование композитных, в том числе многослойных, материалов. Поэтому разработка соответствующих расчетных моделей, постановка и решение краевых задач для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых элементов конструкций является актуальной проблемой.

В монографиях [1]–[7] приведены постановки задач статики и динамики трехслойных элементов конструкций. Содержатся решения конкретных задач упругих и упругопластических трехслойных стержней, пластин и оболочек при изотермическом и тепловом воздействии. Проведен анализ применимости различных кинематических гипотез при постановке и решении прикладных задач механики неоднородных тонкостенных конструкций.

В статьях [8]–[10] проводится анализ собственных колебаний трехслойных и пятислойных стержней и пластин. Приведены постановки и аналитические решения начально-краевых задач, численно исследована зависимость собственных чисел, частот и мод колебаний от геометрических и упругих параметров слоев. Вибрация трехслойных стержней и пластин под действием локальных и импульсных нагрузок рассмотрена в [11], [12].

Напряженно-деформированное состояние упругих и физически нелинейных слоистых элементов конструкций при квазистатических нагрузках исследуется в статьях [13]–[15]. Влияние свойств упругого основания на деформирование трехслойных пластин рассмотрено в [16]–[18]. Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоев предлагается в работе [19]. Равновесие трёхслойной пластины с трещиной исследовано в [20].

Деформированию пятислойных упругих круговых *симметричных* по толщине пластин посвящены публикации [21]–[24]. Здесь приведено аналитическое решение задачи об изгибе *несимметричной* по толщине упругой пятислойной пластины и его численная адаптация.

Постановка краевой задачи. В несимметричной по толщине пятислойной круговой пластине (рисунок 1) цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя. В тонких жестких несущих слоях (1, 2, 4) справедливы гипотезы

зы Кирхгофа: несжимаемая нормаль остается прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности слоя. Несжимаемые по толщине относительно толстые заполнители воспринимают нагрузку в тангенциальном направлении. Нормали в них остаются прямолинейными, но поворачиваются на дополнительные углы $\psi_i(r)$ ($i = 1, 2$).

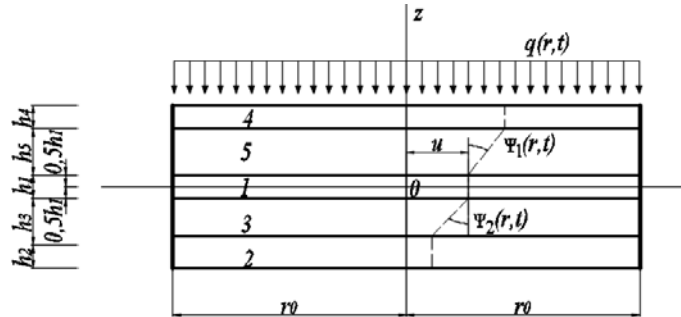


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной пластины

Из гипотезы прямолинейности нормалей заполнителей следует

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rz}^{(5)} &= u_r^{(5)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi_1, \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} &= u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ – относительные сдвиги в верхнем (5) и нижнем (3) заполнителях, запятой в индексе обозначена операция дифференцирования по следующей за ней координате, числовые индексы здесь и далее обозначают номера слоев.

После интегрирования соотношений (1) получим формулы для вычисления радиальных перемещений $u_r^{(k)}$ в слоях:

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= u - zw_{,r} + h_5\psi_1, & \frac{h_1}{2} + h_5 \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5 + h_4; \\ u_r^{(5)} &= u - zw_{,r} + (z - \frac{h_1}{2})\psi_1, & \frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5; \\ u_r^{(1)} &= u - zw_{,r}, & -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2}; \\ u_r^{(3)} &= u - zw_{,r} + (z + \frac{h_1}{2})\psi_2, & -\frac{h_1}{2} - h_3 \leq z \leq -\frac{h_1}{2}; \\ u_r^{(2)} &= u - zw_{,r} - h_3\psi_2, & -\frac{h_1}{2} - h_3 - h_2 \leq z \leq -\frac{h_1}{2} - h_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $h_5\psi_1$, $-h_3\psi_2$ – величина смещений верхнего и нижнего несущих слоев за счет относительного сдвига в соответствующих заполнителях; $u(r)$ – радиальное перемещение срединной плоскости центрального слоя.

Искомые функциями являются прогиб пластины $w(r)$, радиальное перемещение $u(r)$, относительные сдвиги $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$. Деформации следуют из (2) и соотношений Коши [1]. После этого напряжения определяются из закона Гука.

Вывод системы уравнений равновесия проведен с помощью вариационного принципа Лагранжа. При этом учтена работа касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$, $\sigma_{rz}^{(5)}$ в заполнителях. Получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi_1 - a_3\psi_2 - a_4w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2u + a_5\psi_1 - a_6w_{,r}) - h_5G_5\psi_1 &= 0, \\ L_2(-a_3u + a_7\psi_2 - a_8w_{,r}) - h_3G_3\psi_2 &= 0, \\ L_3(a_4u + a_6\psi_1 + a_8\psi_2 - a_9w_{,r}) &= -q, \end{aligned} \quad (3)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left[K_4^+ h_4 + K_5^+ h_5 + K_1^+ h_1 + K_3^+ h_3 + K_2^+ h_2 \right], \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k, \\
a_2 &= \left[K_5^+ \frac{h_5^2}{2} + K_4^+ h_4 h_5 \right], \quad a_3 = \left[K_3^+ \frac{h_3^2}{2} + K_2^+ h_2 h_3 \right], \\
a_4 &= \left[K_4^+ \frac{h_4}{2} (h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ \frac{h_5}{2} (h_1 + h_5) - K_3^+ \frac{h_3}{2} (h_1 + h_3) - K_2^+ \frac{h_2}{2} (h_1 + 2h_3 + h_2) \right], \\
a_5 &= \left[K_4^+ h_4 h_5^2 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3} \right], \quad a_6 = \left[K_4^+ \frac{h_4 h_5}{2} (h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right) \right], \\
a_7 &= \left[K_2^+ h_2 h_3^2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \quad a_8 = \left[K_2^+ \frac{h_2 h_3}{2} (h_1 + 2h_3 + h_2) + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\
a_9 &= \left[K_4^+ h_4 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_4}{2} + h_1 h_5 + \frac{h_4^2}{3} + h_4 h_5 + h_5^2 \right) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + \right. \\
&\quad \left. + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) \right];
\end{aligned}$$

дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

G_k, K_k – модули упругости материалов, k – здесь и далее номер слоя.

На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев. При жесткой заделке контура должны выполняться следующие граничные условия:

$$u(r_0) = \psi_1(r_0) = \psi_2(r_0) = w(r_0) = w_{,r}(r_0) = 0. \quad (4)$$

Граничные условия (4) с уравнениями равновесия (3) замыкают краевую задачу об изгибе пятислойной несимметричной по толщине круговой пластины.

Аналитическое решение краевой задачи. Применив оператор

$$L_1^{-1}(g) \equiv \frac{1}{r} \int rg \, dr, \quad L_1^{-1} L_3 = L_2,$$

к четвертому уравнению в системе (3), получим

$$L_2(a_4 u + a_6 \psi_1 + a_8 \psi_2 - a_9 w_{,r}) = -L_1^{-1}(q). \quad (5)$$

Используя уравнение (5) и первое в (3), избавимся от перемещений u и w в остальных уравнениях. Система приводится к следующему операторному виду

$$\begin{aligned}
L_2(u) &= -L_2 \left(\frac{a_4}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi_1 + \frac{a_3}{a_1} \psi_2 \right), \\
b_1 L_2(\psi_1) + b_2 L_2(\psi_2) - h_5 G_5 \psi_1 &= -\gamma_1 L_1^{-1}(q), \\
b_2 L_2(\psi_1) + b_3 L_2(\psi_2) - h_3 G_3 \psi_2 &= -\gamma_2 L_1^{-1}(q), \\
L_2(w_{,r}) &= -\gamma L_1^{-1}(q) - \gamma_1 L_2(\psi_1) - \gamma_2 L_2(\psi_2),
\end{aligned} \quad (6)$$

где введены коэффициенты

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{a_1}{a_4^2 - a_1 a_9}, \quad \gamma_1 = \frac{a_1 a_6 - a_2 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}, \quad \gamma_2 = \frac{a_1 a_8 + a_3 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}, \\
b_1 &= \left[\frac{a_3 a_4^2 - a_1 a_5 a_9 + a_2^2 a_9 - 2 a_2 a_4 a_6 + a_1 a_6^2}{a_4^2 - a_1 a_9} \right], \quad b_2 = \left[\frac{a_1 a_6 a_8 + a_3 a_4 a_6 - a_2 a_4 a_8 - a_2 a_3 a_9}{a_4^2 - a_1 a_9} \right], \\
b_3 &= \left[\frac{a_4^2 a_7 - a_1 a_7 a_9 + 2 a_3 a_4 a_8 + a_3^2 a_9 + a_1 a_8^2}{a_4^2 - a_1 a_9} \right].
\end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения системы (6) $L_2(\psi_2)$ через ψ_1 и подставив его в третье уравнение (6), получим следующее выражение для ψ_2 :

$$\psi_2 = \frac{(b_2^2 - b_1 b_3)}{h_3 G_3 b_2} L_2(\psi_1) + \frac{h_5 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \psi_1 + \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} L_1^{-1}(q).$$

Полученное подставим во второе уравнение системы (6). В результате, при $q = \text{const}$ получим отдельное дифференциальное уравнение для сдвига ψ_1 :

$$L_2^2(\psi_1) - 2A_1^2 L_2(\psi_1) + A_2^4 \psi_1 = f, \quad (7)$$

где

$$A_1^2 = \frac{h_5 G_5 b_3 + b_1 h_3 G_3}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}, \quad A_2^4 = \frac{h_5 G_5 h_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}, \quad f = \frac{\gamma_1 h_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2} L_1^{-1}(q).$$

Неоднородному дифференциальному уравнению четвёртого порядка (7) соответствует однородное уравнение:

$$L_2^2(\psi_1) - 2A_1^2 L_2(\psi_1) + A_2^4 \psi_1 = 0. \quad (8)$$

Раскрыв дифференциальные операторы в уравнении (8), имеем

$$\psi_{1,rrrr} + \frac{2}{r} \psi_{1,rrr} - \frac{1}{r^2} \psi_{1,rr} + \frac{1}{r^3} \psi_{1,r} - 2A_1^2 (\psi_{1,rr} + \frac{1}{r} \psi_{1,r} - \frac{1}{r^2} \psi_1) + A_2^4 \psi_1 = 0.$$

Проведя замену переменной $x = A_2 r$ в этом уравнении, получим

$$\psi_{1,xxxx} + \frac{2}{x} \psi_{1,xxx} - \frac{1}{x^2} \psi_{1,xx} + \frac{1}{x^3} \psi_{1,x} - \frac{2A_1^2}{A_2^2} (\psi_{1,xx} + \frac{1}{x} \psi_{1,x} - \frac{1}{x^2} \psi_1) + \psi_1 = 0. \quad (9)$$

Однородное уравнение (9) принимает следующий операторный вид, с учетом дифференцирования по x :

$$L_2^2(\psi_1) - 2A_0^2 L_2(\psi_1) + \psi_1 = 0, \quad (10)$$

где $A_0^2 = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{h_5 G_5 b_3 + b_1 h_3 G_3}{2\sqrt{h_5 G_5 h_3 G_3 (b_1 b_3 - b_2^2)}}.$

Функция $f_1(h_k) = b_1 b_3 - b_2^2$ в (10) всегда положительна, что подтверждают графики на рисунке 2: 1 – зависимость функции f_1 от толщины внутреннего несущего слоя h_1 ; 2 – зависимость функции f_1 от толщины нижнего несущего слоя h_2 . Рисунок 3 иллюстрирует положительную определенность функции f_1 при изменении толщины нижнего заполнителя. Аналогичная картина наблюдается при изменении толщин остальных слоев. При расчетах использован базовый пакет Д16-Т-фторопласт-4– Д16-Т-фторопласт-4– Д16-Т с толщинами $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$, $h_3 = h_5 = 0,1$.

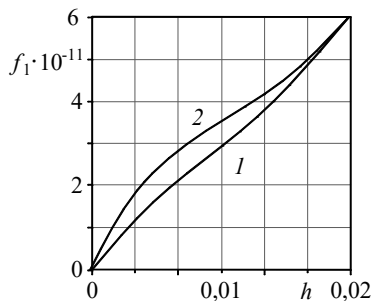


Рисунок 2 – Зависимость функции f_1 от толщины несущих слоев

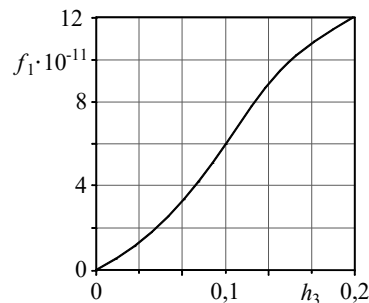


Рисунок 3 – Зависимость функции f_1 от толщины заполнителя

Рассмотрим процедуру решения дифференциального уравнения (10). Предположим, что $\psi_{11}(x)$ является решением уравнения (с переменной x)

$$L_2(\psi_{11}) + \lambda \psi_{11} = 0,$$

где λ – константа, подлежащая определению (собственное число оператора L_2).

Тогда

$$\begin{aligned} L_2(\psi_{11}) &= -\lambda \psi_{11}, \\ L_2^2(\psi_{11}) &= -\lambda L_2(\psi_{11}) = \lambda^2 \psi_{11}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение (10), имеем

$$\lambda^2 \psi_{11} + 2A_0^2 \lambda \psi_{11} + \psi_{11} = 0.$$

Вынося ψ_{11} за скобку, получим

$$\psi_{11} (\lambda^2 + 2A_0^2 \lambda + 1) = 0.$$

Отсюда следует характеристическое уравнение для определения λ :

$$\lambda^2 + 2A_0^2 \lambda + 1 = 0. \quad (11)$$

Корни квадратного уравнения (11) будут

$$\lambda_1^* = -A_0^2 + \sqrt{(A_0^2)^2 - 1}, \quad \lambda_2^* = -A_0^2 - \sqrt{(A_0^2)^2 - 1}.$$

Численное исследование показало, что в принятой области изменения параметров подкоренное выражение всегда положительно. Следовательно, полученные корни отрицательны. Для удобства обозначим

$$\lambda_1^2 = |\lambda_1^*|, \quad \lambda_2^2 = |\lambda_2^*|.$$

Этим двум корням соответствуют два линейно независимых дифференциальных уравнения второго порядка (Бесселя):

$$\begin{aligned} L_2(\psi_{11}) - \lambda_1^2 \psi_{11} &= 0, \\ L_2(\psi_{12}) - \lambda_2^2 \psi_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений известны:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= C_2 I_1(\lambda_1 x) + C_3 K_1(\lambda_1 x), \\ \psi_{12} &= C_4 I_1(\lambda_2 x) + C_5 K_1(\lambda_2 x), \end{aligned}$$

где C_2, \dots, C_5 – константы интегрирования.

Следовательно, общий интеграл однородного дифференциального уравнения (10) может быть представлен в виде

$$\psi_{10} = C_2 I_1(\lambda_1 x) + C_3 K_1(\lambda_1 x) + C_4 I_1(\lambda_2 x) + C_5 K_1(\lambda_2 x).$$

Соответствующее решение в полярной системе координат получим, проведя обратное преобразование $x = A_2 r$. В результате

$$\psi_{10} = C_2 I_1(\beta_1 r) + C_3 K_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r) + C_5 K_1(\beta_2 r). \quad (12)$$

где $\beta_1 = \lambda_1 A_2$, $\beta_2 = \lambda_2 A_2$.

Добавив к полученному фундаментальному решению (12) частное решение ψ_{1r} исходного неоднородного уравнения (7), получим искомое решение для относительного сдвига:

$$\psi_1 = C_2 I_1(\beta_1 r) + C_3 K_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r) + C_5 K_1(\beta_2 r) + \psi_{1r}. \quad (13)$$

Исходя из условия ограниченности перемещений в центре пластины, в (13) для сплошных пластин необходимо положить $C_3 = C_5 = 0$, т. к. функции $K_1(r)$ не ограничены при $r = 0$. В результате решение (13) принимает вид

$$\psi_1 = C_2 I_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r) + \psi_{1r}. \quad (14)$$

После интегрирования оставшихся уравнений в системе (6), с учетом (14), получим искомое общее решение задачи теории упругости в перемещениях. При равномерно распределенной нагрузке q решение будет следующим:

$$\psi_1 = \frac{\gamma_1 q r}{2h_5 G_5} + C_2 I_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r),$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= \frac{\gamma_2 q r}{2 h_3 G_3} + C_2 k_1 I_1(\beta_1 r) + C_4 k_2 I_1(\beta_2 r), \\
w &= -\frac{q r^2}{4} \left(\frac{\gamma_1^2}{h_5 G_5} + \frac{\gamma_2^2}{h_3 G_3} + \frac{\gamma r^2}{16} \right) - \frac{C_2 I_0(\beta_1 r)}{\beta_1} (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) - \frac{C_4 I_0(\beta_2 r)}{\beta_2} (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) - \frac{C_5 \gamma r^2}{4} + C_8; \\
u &= \frac{1}{a_1} \left[\left(a_4 \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_5 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + a_2 - \frac{h_5 G_5 a_3 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) \frac{\gamma_1 q r}{2 h_5 G_5} + \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} (a_4 \gamma_2 - a_3) \frac{q r^2}{4} + \right. \\
&\quad \left. + a_4 \gamma \left(\frac{q r^4}{64} + \frac{C_5 r^2}{4} \right) + C_2 I_1(\beta_1 r) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + a_2 - a_3 k_1) + \right. \\
&\quad \left. + C_4 I_1(\beta_2 r) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + a_2 - a_3 k_2) \right] + C_9 r. \tag{15}
\end{aligned}$$

где C_2, C_4, C_5, C_8, C_9 , – константы интегрирования; коэффициенты

$$k_1 = \frac{(\beta_1^2 (b_2^2 - b_1 b_3) + h_5 G_5 b_3)}{h_3 G_3 b_2}, \quad k_2 = \frac{(\beta_2^2 (b_2^2 - b_1 b_3) + h_5 G_5 b_3)}{h_3 G_3 b_2}.$$

При жесткой заделке контура пластины константы интегрирования следуют из (4):

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{q}{2 I_1(\beta_1) (k_2 - k_1)} \left(\frac{\gamma_2}{h_3 G_3} - \frac{\gamma_1 k_2}{h_5 G_5} \right), \quad C_4 = -\frac{q}{2 I_1(\beta_2) (k_2 - k_1)} \left(\frac{\gamma_2}{h_3 G_3} - \frac{\gamma_1 k_1}{h_5 G_5} \right), \\
C_5 &= -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma_1 q}{h_5 G_5} \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_5 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + \frac{\gamma_2 q (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} + \frac{\gamma q}{6} + \right. \\
&\quad \left. + 2 C_2 I_1(\beta_1) (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + 2 C_4 I_1(\beta_2) (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) \right), \\
C_8 &= \frac{q}{4} \left(\frac{\gamma_1^2}{h_5 G_5} + \frac{\gamma_2^2}{h_3 G_3} + \frac{\gamma}{16} \right) + \frac{C_2 I_0(\beta_1)}{\beta_1} (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + \frac{C_4 I_0(\beta_2)}{\beta_2} (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + \frac{C_5 \gamma}{4}, \\
C_9 &= -\frac{1}{a_1} \left[\left(a_4 \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_5 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + a_2 - \frac{h_5 G_5 a_3 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) \frac{\gamma_1 q}{2 h_5 G_5} + a_4 \gamma \left(\frac{q}{12} + \frac{C_5}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} (a_4 \gamma_2 - a_3) \frac{q}{2} + C_2 I_1(\beta_1) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + a_2 - a_3 k_1) + \right. \\
&\quad \left. + C_4 I_1(\beta_2) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + a_2 - a_3 k_2) \right]. \tag{16}
\end{aligned}$$

В (15), (16) учтена ограниченность решения в начале координат.

Численные результаты получены для пятислойной круговой пластины единичного радиуса при равномерно распределенной нагрузке $q_0 = -1$ МПа. Контур защемлён. Механические характеристики используемых материалов приведены в [2]. Перемещения и сдвиги рассчитывались по формулам (15), (16).

Рисунок 4 *a, б, в* иллюстрирует зависимость прогиба w и относительных сдвигов ψ_1 и ψ_2 от жесткости материала верхнего несущего слоя: 1 – Д16-Т, 2 – титан; 3 – кордиерит. Материалы остальных слоев и толщины соответствуют базовой модели. При замене материала верхнего несущего слоя дюралюминия на титан перемещения уменьшаются незначительно, до 2 %. При использовании в качестве верхнего несущего слоя кордиерита прогиб уменьшается на 22,5 %; относительные сдвиги ψ_1 – на 28,6 %; ψ_2 – на 29,9 %. Радиальное перемещение меньше других на 3 порядка, потому здесь не приводится.

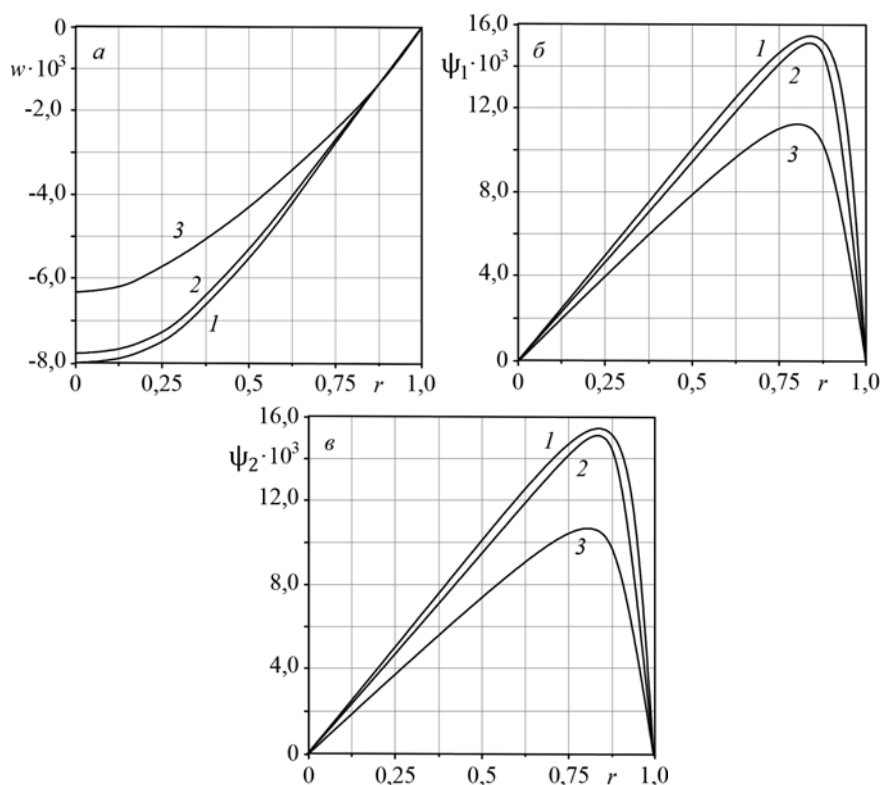


Рисунок 4 – Влияние материала верхнего несущего слоя на перемещения

Заключение. Предложенная механико-математическая модель и полученное решение для пятислойной несимметричной по толщине пластины, позволяют исследовать возникающие в ней перемещения при изгибе. Численные результаты подтвердили зависимость решения от асимметрии пластины, возникающей при разных материалах несущих слоев.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».

Литература

1. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
2. Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
3. Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovaitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
4. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
5. Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields / E. I. Starovaitov, M. A. Zhuravkov, D. V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Singapore : Springer Nature, Pte Ltd., 2024. – 384 p.
6. Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
7. Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.
8. Старовойтов, Э. И. Свободные колебания в нейтронном потоке круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим основанием / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 2. – С. 92–97.
9. Лачугина, Е. А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных креплениях контура / Е. А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.
10. Будникова, Д. А. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.

11. Kubenko, V.D. Vibrations of sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko, Yu. M. Pleskachevskii, E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.
12. Starovoitov, É. I. Vibration of a sandwich rod under local and impulsive forces / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2005 – Vol. 41, № 7. – P. 809–816.
13. Леоненко, Д. В. Поперечный изгиб круговой сэндвич-пластины ступенчатой толщины / Д. В. Леоненко // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*. – 2020. – № 6 (123). – С. 151–155.
14. Захарчук, Ю. В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
15. Нестерович, А. В. Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2021. – № 3 (48). – С. 24–29.
16. Старовойтов, Э. И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62.
17. Старовойтов, Э. И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Механика композитных материалов*. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
18. Старовойтов, Э. И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.
19. Димитриенко, Ю. И. Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин с проскальзыванием слоев / Ю. И. Димитриенко, Е. А. Губарева // *Математическое моделирование и численные методы*. – 2022. – Т. 34, № 2. – С. 28–62.
20. Пяткина, Е. В. Равновесие трёхслойной пластины с трещиной / Е. В. Пяткина // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2022. – Т. 25, № 1 (89). – С. 105–120.
21. Салицкий, В. С. Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации*. – Гомель, 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.
22. Салицкий, В. С. Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Теоретическая и прикладная механика*. – Минск, 2023. – Вып. 38. – С. 234–239.
23. Салицкий, В. С. Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации*. – 2024. – № 17. – С. 114–119.
24. Салицкий, В. С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.