Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 550.831 *ГЕОФИЗИКА*

В. Н. СТРАХОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 7 III 1973)

1. Сущность предлагаемого подхода состоит в следующем (для простоты ограничиваемся случаем двухмерной задачи). Пусть $f(x)$ — определенная на всей оси Ox локально интегрируемая функция. Величина

$$\mathrm{E}[f(x)]=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2R}\int_{-R}^{+R}f(x)\,dx \tag{1}$$

называется математическим ожиданием этой функции. Если $f(x)$ задана приближенно, функцией $f_\delta(x)=f(x)+\delta f(x)$, где $\delta f(x)$ — также локально интегрируема и $\mathrm{E}[\delta f(x)]=0$, то математическое ожидание является одной из самых надежно определяемых по $f_\delta(x)$ характеристик функции $f(x)$.

Отсюда вытекает следующий подход к решению обратной задачи. Пусть $u(x)$ — некоторый элемент изучаемого аномального поля, p — какой-либо параметр, характеризующий распределение источников поля. Подыскивается такая определенная на всей оси локально интегрируемая функция $\psi(x)=\Phi(u(x),x)$, чтобы имело место соотношение

$$\mathrm{E}[\Phi(u(x),x)]=p. \tag{2}$$

Обобщение этого подхода состоит в том, чтобы определять параметр p в виде

$$p=\varphi(q_1,q_2,\ldots,q_r,\ldots,q_n), \tag{3}$$

где

$$q_r=\mathrm{E}[\Phi_r(u(x),x)]. \tag{4}$$

Например, p может быть корнем многочлена степени $n-1$, коэффициенты которого представимы соотношениями (4),

2. Одно из важных достоинств предлагаемого подхода состоит в том, что при задании функции $u(x)$ на конечном (но достаточно большом) интервале оси Ox для функции

$$F(R)=\frac{1}{2R}\int_{-R}^{+R}\Phi(u(x),x)\,dx \tag{5}$$

часто (во всяком случае так обстоит дело во всех приводимых ниже примерах) может быть найдена хорошая асимптотика (при больших R) вида

$$F(R)\sim a+b/R+c/R^2+d/R^3 \tag{6}$$

($a=\mathrm{E}[\Phi(u(x),x)]$). Вычисляя $F(R)$ для ряда (больших) значений R и аппроксимируя ее (например, по методу наименьших квадратов) полиномом $P_3(1/R)=a+b/R+c/R^2+d/R^3$, можно найти искомое значение математического ожидания функции Φ как свободный член аппроксимирующего полинома.

3. Первый пример применения описанного подхода относится к определению интегральных характеристик источников гравитационных и магнитных аномалий.

Пусть ($s=x+iz\notin S$, $\sigma=\xi+i\zeta\in S$)

$$G(s)=g_z(x,z)+ig_x(x,z)=2if\iint\limits_S \frac{\delta(\xi,\zeta)}{\sigma-s}\,dS \tag{7}$$

— комплексная напряженность поля, порожденного массами плотности $\delta(\xi,\zeta)$, распределенными по области S.

Соответственно пусть

$$H(s)=Z(x,z)+iH(x,z)=2i\iint\limits_{S'} \frac{I(\xi,\zeta)}{(\sigma-S)^2}\,dS \tag{8}$$

— комплексная напряженность внешнего магнитного поля, порожденного намагниченностью $I(\xi,\zeta)=I_x(\xi,\zeta)+iI_z(\xi,\zeta)$, распределенной по области S'.

На бесконечности $G(s)$ и $H(s)$ представимы рядами Лорана

$$G(s)=-2if\sum_{n=1}^{\infty} m_{n-1}s^{-n}, \tag{9}$$

$$H(s)=2i\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)M_{n-2}s^{-n}, \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} m_k&=\iint\limits_S \delta(\xi,s)\,\sigma^k\,dE \\ M_k&=\iint\limits_{S'} I(\xi,\zeta)\,\sigma^k\,dS, \end{aligned}\right\} \quad k=0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

— комплексные моменты (гравитирующих, соответственно намагниченных) масс относительно начала координат ([1, 2]). Эти величины (а также некоторые их комбинации) и носят название интегральных характеристик источников. Наибольший интерес представляют величины m_0 (суммарная масс) M_0 (суммарный магнитный момент) и

$$\bar{s}_g=m_1/m_0, \quad \bar{s}_m=M_1/M_0 \tag{12}$$

— координаты центров аномальных масс (гравитирующих, соответственно намагниченных).

Пользуясь приводимыми ниже теоремами 1 и 2, легко найти выражения интересующего нас типа для интегральных характеристик аномалиеобразующих масс.

Пусть $f(s)$ и $g(s)$ — две аналитические в полуплоскости $z\geqslant 0$ функции, представимые в окрестности бесконечно удаленной точки рядами Лорана

$$f(s)=\sum_{m=n_f}^{\infty} f_m s^{-m} \qquad g(s)=\sum_{m=n_g}^{\infty} g_m s^{-m}, \tag{13}$$

причем $g(s)$ может иметь конечное число нулей в верхней полуплоскости и на действительной оси, но нули, принадлежащие оси Ox, всегда простые.

Теорема 1. *Если $n_f=n_g=n$, то*

$$\mathbf{E}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f_n}{g_n}. \tag{14}$$

Теорема 2. *Если $n_g-n_f=1$, $n_f=n$, то*

$$\mathbf{E}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f_{n+1}g_{n+1}-f_n g_{n+2}}{g_{n+1}^2}. \tag{15}$$

Из этих теорем нетрудно получить многие формулы, из которых приведем лишь некоторые

$$\mathbf{E}[xG(x)] = -2ifm_0, \tag{16}$$

$$\left(\mathbf{E}\left[\frac{1}{xG(x)}\right]\right)^{-1} = -2ifm_0, \tag{17}$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{G(x)}{G'(x)}\right] = \bar{s}_g, \tag{18}$$

$$\mathbf{E}[xG(x)]\mathbf{E}\left[\frac{1}{G(x)}\right] = \bar{s}_g, \tag{19}$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{xH^2(x)}{H'(x)}\right] = -iM_0, \tag{20}$$

$$2\mathbf{E}\left[\frac{H(x)}{H'(x)}\right] = \bar{s}_m, \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\left[\frac{\{(x^2H(x))'\}^2}{H^2(x)}\right]\right)^{1/2} = \bar{s}_m. \tag{22}$$

4. Пользуясь теоремами 1 и 2, можно получить ряд формул, интересных с точки зрения совместного анализа гравитационных и магнитных аномалий, например:

$$\mathbf{E}\left[\frac{xH(x)}{G(x)}\right] = -\frac{M_0}{fm_0}, \tag{23}$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{H(x)}{G'(x)}\right] = \frac{M_0}{fm_0}, \tag{24}$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{xU(x)}{G(x)}\right] = -\frac{M_0}{fm_0}(\bar{s}_m - \bar{s}_g); \tag{25}$$

здесь U — комплексный магнитный потенциал аномального магнитного поля, $H(s) = -dU(s)/ds$,

$$\mathbf{E}\left[\frac{G'(x)}{H(x)}\right]\mathbf{E}\left[\frac{xU(x)}{G(x)}\right] = \bar{s}_g - \bar{s}_m. \tag{26}$$

5. Приведем пример использования метода при решении обратной задачи для аномалий, созданных телами известной формы.

Пусть гравитационное поле создается массами (линейной) плотности $\delta = \text{const}$, распределенными по отрезку длины $2l$, центр которого находится в точке s_0 (ясно, что $s_0 = \bar{s}_g$), образующему угол θ с осью Ox.

Решение обратной задачи состоит в нахождении δ, s_0, l, θ по известному полю $g_z(x, 0)$. Положив $t = le^{i\theta}$, $l = |t|$, для t имеем квадратное уравнение

$$t^2 - 3(\bar{s}_g^2 - m_2/m_0) = 0, \tag{27}$$

нужный корень которого легко определяется: $\bar{s}_g$ находится по формулам (18), (19), а m_2 дается, например соотношением

$$\frac{m_2}{m_0} = \frac{1}{2}\left\{\bar{s}_g^2 - \mathbf{E}\left[\frac{(xG(x))'}{G(x)}\right]\right\}. \tag{28}$$

Далее имеем (m_0 находится из (16), (17))

$$\delta = {}^1/_2 m_0/|t|. \tag{29}$$

6. В заключение покажем, каким образом можно получить в рассматриваемом подходе выражение для радиусов сходимости R_g и R_m рядов

Лорана функций $G(s)$ и $H(s)$; опираясь на эти выражения, можно построить целый ряд методик определения наиболее удаленных от оси Ox особых точек функций $G(s)$ и $H(s)$, иначе — методик определения так называемых «нижних кромок» возмущающих тел.

Заметим, что из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Если функция $h(s)$ аналитична в верхней полуплоскости $z\geqslant 0$, имеет в ней не более чем конечное число нулей, причем нули на оси Ox простые, а на бесконечности представима рядом Лорана*

$$h(s)=\sum_{m=n}^{\infty} h_m s^{-m}, \quad n\geqslant 0, \tag{30}$$

то справедливо соотношение

$$\mathbf{E}\left[\frac{xh(x)}{2h(-x)}\right]=(-1)^n\frac{h_{n+1}}{h_n}. \tag{31}$$

Отсюда нетрудно получить формулы (верхний индекс n — символ n-й производной):

$$\left|\frac{m_{n+1}}{m_n}\right|=\frac{1}{n+1}\left|\mathbf{E}\left[\frac{xp_n(x)}{2p_n(-x)}\right]\right|, \quad p_n(x)=(x^nG(x))^{(n)}, \tag{32}$$

$$\left|\frac{M_{n+1}}{M_n}\right|=\frac{1}{n+2}\left|\mathbf{E}\left[\frac{xr_n(x)}{r_n(-x)}\right]\right|, \quad r_n(x)=(x^{n+1}H(x))^{(n)}. \tag{33}$$

Если особенности функций $H(s)$ и $G(s)$ таковы, что для радиуса сходимости справедлива формула Даламбера, то имеем

$$\frac{1}{R_g}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m_{n+1}}{m_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|\mathbf{E}\left[\frac{xp_n(x)}{2p_n(-x)}\right]\right|, \tag{34}$$

$$\frac{1}{R_m}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{M_{n+1}}{M_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\left|\mathbf{E}\left[\frac{xr_n(x)}{r_n(-x)}\right]\right|. \tag{35}$$

В общем случае, применяя формулу Коши — Адамара, находим

$$R_g=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{m_0}{(n+1)!}\prod_{\nu=1}^{n}\mathbf{E}\left[\frac{xp_\nu(x)}{p_\nu(-x)}\right]\right|\right)^{1/n}, \tag{36}$$

$$R_m=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_0}{(n+2)!}\prod_{\nu=1}^{n}\mathbf{E}\left[\frac{xr_n(x)}{r_n(-x)}\right]\right)^{1/n}, \tag{37}$$

где m_0 и M_0 могут быть выражены по любому из приведенных выше соотношений.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
28 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Заморев, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 4—5 (1941). [2] В. Н. Страхов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2 (1959).