Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 517.432 *МАТЕМАТИКА*

А. В. КУЖЕЛЬ

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ НАДЯ — ФОЯША ДЛЯ ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 VI 1973)

Среди различных вариантов «теоремы умножения» характеристических оператор-функций (или матриц-функций) особое место занимает формула умножения, установленная для случая сжатий в работах Б. С. Надя и Ч. Фояша ([1], [2]); в ([3]) упомянутая формула умножения была обобщена на случай широкого класса ограниченных операторов, не являющихся сжатиями.

В настоящей заметке получен аналог теоремы Надя — Фояша для случая диссипативных операторов.

1. Пусть A — ограниченный диссипативный оператор $\left(\text{т. е. } \dfrac{A-A^*}{2i}\geqslant 0\right)$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное подпространство оператора A и $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_1$, то оператор A представим в виде

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & Q_{A_1}LQ_{A_2} \\ 0 & A_2\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $A_1=A|_{\mathfrak{H}_1}$ и $A_2=P_2A|_{\mathfrak{H}_2}$ — диссипативные операторы, действующие в подпространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно; $Q_{A_k}=\left(\dfrac{A_k-A_k^*}{2i}\right)^{1/2}$; L — некоторый ограниченный оператор, $\|L\|\leqslant 2$, отображающий многообразие $Q_{A_2}\mathfrak{H}_2$ в подпространство $\mathfrak{H}_1$.

Обратно: *если A_1 и A_2 — произвольные диссипативные операторы, действующие в подпространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно, а L — некоторый ограниченный оператор с нормой $\|L\|\leqslant 2$, отображающий $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$, то оператор A, определяемый в пространстве $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$ равенством* (1), *также является диссипативным.*

2. Рассмотрим теперь вспомогательный оператор σ, определяемый соотношением

$$\sigma Q_A f=\gamma Q f, \tag{2}$$

где γ и Q — операторные матрицы вида

$$\gamma=\begin{pmatrix} I_1 & \dfrac{1}{2i}L \\ 0 & D_L\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} Q_{A_1} & 0 \\ 0 & Q_{A_2}\end{pmatrix}$$

а $D_L=(I_2-{}^1/_4L^*L)^{1/2}$ (I_k — единичный оператор, действующий в подпространстве $\mathfrak{H}_k$). Такое определение оператора σ корректно (т. е. если $Q_Af=0$, то $\gamma Qf=0$) и оператор σ является изометрическим на многообразии $\mathfrak{R}(Q_A)$. Расширяя оператор σ по непрерывности, получим изометрический оператор, действующий на некотором подпространстве E_A пространства $\mathfrak{H}$ (и таком, что подпространство $\mathfrak{H}\ominus E_A$ аннулирует оператор Q_A).

Аналогично равенством

$$\tilde{\sigma} Q_A f = \tilde{\gamma} Q f,$$

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} D_{L^*} & 0 \\ -\frac{1}{2i} L^* & I_2 \end{pmatrix},$$

определяется изометрический оператор $\tilde{\sigma}$.

Характеристическая оператор-функция $W_A(\lambda)$ диссипативного оператора A определяется равенством *

$$W_A(\lambda) = I - 2iQ_A(A - \lambda I)^{-1} Q_A.$$

Используя предыдущие результаты, устанавливаем следующее утверждение.

Теорема. *Если $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное подпространство диссипативного оператора A и $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$, то его характеристическая оператор-функция $W_A(\lambda)$ представима в виде*

$$W_A(\lambda) = \sigma^* W_1(\lambda) \omega W_2(\lambda) \tilde{\sigma},$$

где

$$W_1(\lambda) = \begin{pmatrix} W_{A_1}(\lambda) & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad W_2(\lambda) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & W_{A_2}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\omega = \begin{pmatrix} D_{L^*} & \frac{1}{2i} L \\ \frac{1}{2i} L^* & D_L \end{pmatrix},$$

причем ω — постоянная унитарная операторная матрица.

Отметим, что полученный результат можно перенести на широкий класс ограниченных несамосопряженных операторов (аналогично тому, как это было сделано в ([3]) для случая неунитарных операторов).

Представляет также интерес аналогичный результат для случая неограниченных операторов.

Симферопольский государственный университет им. М. В. Фрунзе

Поступило 25 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *B. Sz-Nagy, C. Foias*, C. R., v. 256, 3413 (1963). [2] *B. Sz-Nagy, C. Foias*, Acta Sci. Math., v. 28, 201 (1967). [3] *А. В. Кужель*, Acta Sci. Math., v. 30, 225 (1969). [4] *М. С. Бродский, М. С. Лившиц*, УМН, т. 13, в. 1(79) (1958). [5] *М. С. Бродский*, Треугольные и жордановы представления операторов, «Наука», 1969.

* Обычно оператору A ставится в соответствие семейство оператор-функций (см., например, ([4], [5])). Одной из таких оператор-функций является записанная характеристическая оператор-функция $W_A(\lambda)$, которая в некотором смысле играет роль минимальной.