Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

В. Н. ВРАГОВ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 I 1973)

Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$, $H=\{(x_0, x)\in R^{n+1}: 0<x_0<h\}$,

$$\Gamma^0=\{(0, x)\in R^{n+1}\}, \quad \Gamma^h=\{(h, x)\in R^{n+1}\}.$$

Рассмотрим в полосе H уравнение

$$Lu=k(x_0, x)u_{x_0x_0}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0, x)u_{x_ix_j}+a_0(x_0, x)u_{x_0}+\sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}+au=f, \qquad (1)$$

$$k(x_0, x)\geqslant 0, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0, x)\xi_i\xi_j\geqslant m|\xi|^2, \quad m>0, \quad \forall\xi\in R^n, \quad (x_0, x)\in H;$$

$$k(x_0, x),\ a_{ij},\ a_i,\ a_0,\ a\in C^\infty(H\cup\Gamma^0\cup\Gamma^h).$$

$$|D^\alpha k|, |D^\alpha a_{ij}|, |D^\alpha a_0|, |D^\alpha a_i|, |D^\alpha a|\leqslant M|\alpha|<\infty, \quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_0^{\alpha_0}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n, \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Отметим, что в класс уравнений (1) входят строго гиперболические, параболические, вырождающиеся гиперболические уравнения и др.

Задача Коши для уравнения (1) в случае $n=1$, $k(x_0, x)=x_0{}^m$, $0\leqslant m<2$, изучалась многими авторами (см. ([1], [2], [4])). Из последних работ, посвященных изучению уравнения (1), отметим работы ([5-9]).

В настоящей заметке ставится «видоизмененная» задача Коши ([1], [4]) с данными на гиперплоскости Γ^0. При некоторых условиях на коэффициенты и правую часть уравнения (1), которые будут приведены ниже, доказана разрешимость задачи Коши с однородными начальными условиями в пространствах Соболева $W_2{}^q(H)$. Приводятся примеры, показывающие, что нарушение наших условий на коэффициенты уравнения может привести как к неединственности, так и к несуществованию решения задачи Коши.

Пусть $\Gamma_+=\{(0, x)\in\Gamma^0: k(0, x)>0\}$, $\quad\Gamma_1=\overline{\Gamma}_+$, $\quad\Gamma_2=\Gamma^0\setminus\Gamma_1$.

З а д а ч а К о ш и. Найти решение уравнения (1) в области H такое, что

$$u|_{\Gamma^0}=\varphi(x), \quad u_{x_0}|_{\Gamma_1}=\psi(x), \qquad (2)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции.

Всюду ниже будет рассматриваться задача Коши с однородными начальными условиями, т. е. $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$.

Как обычно, через $W_2{}^q(H)$ обозначим пространство Соболева ([3]) с нормой

$$\|u\|_q{}^2=\int_H\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant q}|D^\alpha u|^2\Big)dH, \quad (u, v)_0=\int_H uv\,dH.$$

Через C_L обозначим класс функций из $C^\infty(H) \cap W_2^2(H)$, удовлетворяющий краевым условиям (2).

Наряду с задачей Коши (1), (2) рассмотрим задачу Коши для «возмущенного» уравнения $\varepsilon>0$:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon u_{\varepsilon x_0 x_0} + L u_\varepsilon = f, \tag{3}$$

$$u_\varepsilon(0, x) = u_{\varepsilon x_0}(0, x) = 0. \tag{4}$$

Через C_{L_ε} $(\varepsilon>0)$ обозначим класс функций из $C^\infty(H) \cap W_2^2(H)$, удовлетворяющий краевым условиям (4), и будем считать, что $C_{L_0} = C_L$, $L_0 u = Lu$.

Лемма. *Пусть существует константа $\lambda_0>0$ такая, что*

$$2a_0(x_0, x) - k_{x_0}(x_0, x) + 2\lambda_0 k(x_0, x) \geqslant \delta > 0. \tag{5}$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$(L_\varepsilon u, p^2 u_{x_0})_0 \geqslant \delta \|p u_{x_0}\|_0^2 + c(\lambda)\left[\sum_{i=1}^{h} \|p u_{x_i}\|_0^2 + \|pu\|_0^2\right],$$

$$\forall u \in C_{L_\varepsilon} (\varepsilon \geqslant 0), \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} c(\lambda) = +\infty,$$

где $p(x_0, \lambda) = \exp(-\lambda x_0)$.

Доказательство этой леммы очевидно и проводится интегрированием по частям.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (5), *и, кроме того,*

$$2a_0(x_0, x) + k_{x_0}(x_0, x) + 2\lambda_0 k(x_0, x) \geqslant \delta_1 > 0, \tag{6}$$

$$f(x_0, x) \in C^\infty(H) \cap W_2^1(H), \quad f(0, x) = 0.$$

Тогда существует и притом единственное решение задачи Коши (1), (2) *из пространства Соболева* $W_2^2(H)$.

Доказательство. Единственность решения следует из леммы. Докажем существование решения задачи Коши.

Из предположений на коэффициенты и правую часть уравнения следует, что для любой функции $f(x_0, x)$ существует единственное решение задачи Коши (3), (4) $(\varepsilon>0)$, $u_\varepsilon \in C^\infty(H) \cap W_2^2(H)$.

Так как функция $f(x_0, x)$ обращается в нуль на Γ^0, то из уравнения (3) следует, что $u_{\varepsilon x_0 x_0}(0, x) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$.

Далее легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^{n} (f_{x_i}, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0 = \sum_{i=1}^{n} (L_\varepsilon u_{\varepsilon x_i}, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0 + \sum_{i=1}^{n} (k_{x_i} u_{\varepsilon x_0 x_0}, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,q=1}^{n} (a_{q_j x_i} u_{\varepsilon x_q x_j}, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{j x_i} u_{\varepsilon x_j}, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (a_{x_i} u_\varepsilon, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0.$$

Из леммы и неравенства Коши следует, что если выбрать $\lambda>\lambda_0$ достаточно большим, то

$$\sum_{i=1}^{n} (f_{x_i}, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0 \geqslant \delta_2 \sum_{i=1}^{n} \|p u_{\varepsilon x_i x_0}\|_0^2 + c_1(\lambda) \sum_{i,j=1}^{n} \|p u_{\varepsilon x_i x_j}\|_0^2 +$$

$$+ c_2(\lambda) \|p u_\varepsilon\|_1^2 + \sum_{i=1}^{n} (k_{x_i} u_{\varepsilon x_0 x_0}, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0. \tag{7}$$

С другой стороны, так как $u_{\varepsilon x_0 x_0}(0, x)=0$, функция $u_{\varepsilon x_0} \in C_{L\varepsilon}$ и,

$$(f_{x_0}\, p^2 u_{\varepsilon x_0 x_0})_0 = (L_\varepsilon u_{\varepsilon x_0},\, p^2 u_{\varepsilon x_0 x_0})_0 + (k_{x_0} u_{\varepsilon x_0 x_0},\, p^2 u_{\varepsilon x_0 x_0})_0 + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ijx_0} u_{\varepsilon x_i x_j},\, p^2 u_{\varepsilon x_0 x_0})_0 + \ldots$$

Далее из условия (6) следует, что к оператору

$$\tilde{L}u = L_\varepsilon u + k_{x_0} u_{x_0}$$

можно применить доказанную выше лемму.

Отсюда, выбирая $\lambda > \lambda_0$ достаточно большим и используя неравенства Коши и (7), получим

$$\sum_{i=0}^{n} (f_{x_i},\, p^2 u_{\varepsilon x_i x_0})_0 \geqslant c_2 \sum_{i,j=0}^{n} \| p u_{x_i x_j} \|_0^2 + c_3 \| pu \|_1^2,$$

причем константы c_2, $c_3 > 0$ не зависят от ε.

Таким образом, получена равномерная по ε априорная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_2 \leqslant c \|f\|_1 \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Отсюда следует, что из множества функций $\{u_\varepsilon\}$ можно извлечь слабо сходящуюся последовательность функций

$$\{u_{\varepsilon_n}\} \to u \in W_2^2(H), \qquad u(0, x) = u_{x_0}(0, x) = 0.$$

С другой стороны, для любой функции $v \in C_0^\infty(H)$ имеет место тождество

$$(u_{\varepsilon_n},\, L_\varepsilon^* v)_0 = (f, v)_0,$$

где $L_\varepsilon^* v$ — формально сопряженный к L_ε дифференциальный оператор.

Из слабой сходимости последовательности $\{u_{\varepsilon_n}\}$ следует, что

$$(u, L^* v)_0 = (f, v)_0 \qquad \forall v \in C_0^\infty(H),$$

т.е. функция $u \in W_2^2(H)$ является решением нашего уравнения и удовлетворяет в среднем начальным условиям.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (5) *и, кроме того,*

$$a_0(x_0, x) + (m + 1/2)\, k_{x_0}(x_0, x) + \lambda_0 k(x_0, x) \geqslant \delta_1 > 0,$$

$$f(x_0, x) \in W_2^q(H), \qquad \frac{\partial^i}{\partial x_0^i} f(x_0, x)\big|_{x_0=0} = 0,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, q-1, \qquad i = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Тогда существует решение задачи Коши (1), (2) *из пространства* $W_2^{q+1}(H)$.

Доказательство теоремы 2 в основных чертах совпадает с доказательством теоремы 1 и поэтому здесь не приводится.

Пример.

$$Lu = x_1^{2m} u_{x_0 x_0} - u_{x_1 x_1} - m x_1^{m-1} u_{x_0} = 0. \tag{8}$$

Пусть $\tau(s) \in C^\infty$ и такая, что

$$\tau(s) = 0, \quad s \geqslant 0, \quad \tau(s) \neq 0, \quad s < 0.$$

Легко видеть, что функция $u(x_0, x_1) = \tau\left(\dfrac{x_1^{m+1}}{m+1} - x_0\right)$ является решением уравнения (8), а это значит, что задача Коши (1), (2) может иметь, вообще говоря, не единственное решение, если не выполняется условие (5).

Этот же пример (8) показывает, что если рассмотреть сопряженное к уравнению (8) уравнение

$$L^{*}v=x_1^{m}\ v_{x_0x_0}-v_{x_1x_1}+mx_1^{m-1}v_{x_0}=0, \tag{9}$$

то функция

$$v(x_0, x_1)=\tau\left(\frac{x_1}{m+1}+x_0-h\right)$$

является решением уравнения (9), но это означает, что задача Коши для уравнения (8) с правой частью $f(x_0, x)$ не всегда разрешима.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
15 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, 1959. [2] М. М. Смирнов, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, «Наука», 1966. [3] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1962. [4] С. А. Терсенов, Сибирск. матем. журн., 2, № 6 (1961). [5] С. А. Терсенов, ДАН, 196, № 5 (1971). [6] В. А. Елеев, Дифференциальные уравнения, 6, № 1 (1970). [7] В. А. Брюханов, там же, 7, № 1 (1971). [8] А. С. Калашников, Матем. сборн., 85, № 2 (1971). [9] А. С. Калашников, там же, 88, № 4 (1972).