Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 513.73 *МАТЕМАТИКА*

В. Т. ФОМЕНКО

О КВАЗИКОРРЕКТНОСТИ ВНЕШНИХ СВЯЗЕЙ В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 26 II 1973)

В теории бесконечно малых изгибаний поверхностей с краем важное место занимают вопросы, связанные с изучением характера внешних связей поверхности. Внешняя связь порождает некоторое условие на изгибающее поле $\bar{U}$ поверхности, которое в большинстве случаев может быть представлено в виде

$$R(\bar{U})=\gamma, \tag{1}$$

где R — однородный аддитивный оператор, γ — известная функция.

Характер внешней связи (1) определяется следующим образом (см. ([1]), гл. 5, § 10). Связь вида (1) называется *квазикорректной* с p степенями свободы, если для любой функции γ поверхность допускает бесконечно малые изгибания, зависящие от p параметров, совместимые с этой связью, причем изгибающие поля непрерывно (в смысле некоторой метрики) зависят от функции γ. Однородная связь $R(\bar{U})=0$ в этом случае называется почти жесткой с p степенями свободы; поверхность с этой связью допускает p линейно независимых бесконечно малых изгибаний. В случае $p=0$ квазикорректная связь называется *корректной*, а жесткость поверхности с условием $R(\bar{U})=0$ — *оптимальной*; в противном случае жесткость поверхности называется *сверхоптимальной*. Квазикорректную связь можно превратить в корректную, наложив на поверхность добавочно конечное число связей точечного типа.

Связи вида (1) могут быть осуществлены различными способами (склеивание поверхностей, втулочные связи, окаймление края поверхностной полосой и т. д.). К числу общих связей вида (1) относится краевое условие обобщенного скольжения $(\bar{U}\bar{l})=\gamma$, где $\bar{l}$ — заданное вдоль края поверхности векторное поле. К настоящему времени характер этой связи изучен достаточно полно (см., например, ([1]), гл. 5; ([2-4])).

Другим широким классом внешних связей вида (1) являются связи, определяющие поведение касательных плоскостей поверхности вдоль края при бесконечно малых изгибаниях. Аналитически эти связи можно выразить формулой

$$(\bar{V}\bar{L})=\gamma, \tag{2}$$

где $\bar{V}$ — вектор вращения бесконечно малого изгибания, однозначно определяемый изгибающим полем $\bar{U}$, $\bar{L}$ — заданное вдоль края поверхности векторное поле. Если обозначить через $\delta\varphi$ угол поворота касательной плоскости при бесконечно малом изгибании поверхности вокруг нормали к поверхности, через $\delta\psi$ — угол поворота касательной плоскости вокруг тангенциальной составляющей поля $\bar{L}$, то условие $(\bar{V}\bar{L})=\gamma$ задает вдоль края линейную комбинацию углов $\delta\varphi$ и $\delta\psi$. Внешнюю связь $(\bar{V}\bar{L})=\gamma$ можно назвать *условием обобщенного поворота граничной полосы*.

Наиболее общими внешними связями являются связи, определяющие при бесконечно малом изгибании зависимость между основными характеристиками полосы: смещением точек края и поворотом касательных плоскостей поверхности вдоль края. Линейная зависимость между указанными характеристиками записывается в виде

$$R(\overline{U}, \overline{V}) \equiv \alpha(\overline{U}\overline{l}) + \beta(\overline{V}\overline{L}) = \gamma, \tag{3}$$

где α, β — заданные функции.

Векторные поля $\overline{l}$ и $\overline{L}$ назовем собственными для условия (3), если внешняя связь (3), порожденная этими векторными полями, не является квазикорректной. В настоящей работе формулируются различные признаки квазикорректности граничных условий (2) и (3) и описывается картина распределения собственных векторных полей.

В дальнейшем будем считать, что S — односвязная поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geqslant k_0 > 0$, $S \in C^{3,\lambda}$, $\partial S \in C^{1,\lambda}$; $\overline{l}$, $\overline{L}$, α, β, $\gamma \in C^{\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

1°. Пусть S — поверхность и $\overline{L}$ — векторное поле вдоль ∂S, заданное по формуле

$$\overline{L} = \cos\alpha \cdot \overline{L}_0 - \sin\alpha \cdot \overline{n},$$

где $\overline{L}_0 \in S$, $|\overline{L}_0| = 1$, $\overline{n}$ — нормаль к S вдоль ∂S; $\alpha = (\widehat{L_0, \overline{L}})$, причем угол α отсчитывается от $\overline{L}_0$ до $\overline{L}$ против часовой стрелки, если смотреть со стороны касательной к краю ∂S. Обозначим через n вращение образа $\overline{L}_0$ в плоскости (x, y) при топологическом отображении S на плоскости (x, y), т. е. $n = \operatorname{Ind} \overline{L}_0$.

Необходимые и достаточные признаки квазикорректности условия обобщенного поворота граничной полосы поверхности S даются следующими теоремами.

Теорема 1. *Если $n > 1$, то векторное поле $\overline{L}$, $\overline{L} \nparallel \overline{n}$, является собственным для условия* (2). *При этом условие $(\overline{V}\overline{L}) = 0$ почти жестко с $p \geqslant 3$ степенями свободы, а неоднородное условие $(\overline{V}\overline{L}) = \gamma$ совместимо с бесконечно малыми изгибаниями тогда и только тогда, когда γ удовлетворяет $(2n + p - 5)$ условиям разрешимости.*

Теорема 2. *Если $n \leqslant 1$, то векторное поле $\overline{L}$, $\overline{L} \nparallel \overline{n}$, является собственным для условия* (2) *тогда и только тогда, когда однородное условие $(\overline{V}\overline{L}) = 0$ почти жестко с $p = 5 - 2n$ степенями свободы. При этом, если условие $(\overline{V}\overline{L}) = 0$ почти жестко с $p > 5 - 2n$ степенями свободы, то условие $(\overline{V}\overline{L}) = \gamma$ совместно с бесконечно малыми изгибаниями поверхности S тогда и только тогда, когда γ удовлетворяет $(p - 5 + 2n)$ условиям разрешимости.*

2°. Сформулируем ряд теорем о распределении собственных векторных полей условия обобщенного поворота граничной полосы поверхности. Пусть S_f — поверхность, расположенная в системе координат $Oxyz$ выпуклостью вниз, однозначно проектируется в направлении оси Oz и задана уравнением $z = f(x, y)$. Будем считать, что нормаль поверхности S_f внутренняя. Обозначим $\theta = (\widehat{\overline{n}, Oz})$; введем в рассмотрение инвариант $a = K^{-1} c^{i\lambda} c^{j\mu} \times b_{\lambda\mu} \cdot (\overline{L}_0 \partial_i \overline{r}) \partial_j \theta$, где c^{ij} — дискриминантный тензор поверхности, $b_{\lambda\mu}$ — тензор квадратичной формы поверхности S_f: $\overline{r} = \overline{r}(u^1, u^2)$; ∂_i — символ дифференцирования по координате u^i. Рассмотрим вдоль края ∂S_f однопараметрическое семейство векторных полей $\overline{L}_{\alpha_\varepsilon}$, определяемых по формуле

$$\overline{L}_{\alpha_\varepsilon} = \cos\alpha_\varepsilon \overline{L}_0 - \sin\alpha_\varepsilon \overline{n}, \tag{4}$$

$$\alpha_\varepsilon = \operatorname{arc\,tg}\,[a \operatorname{tg}\theta + \varepsilon(\operatorname{tg}\alpha_1 - a \operatorname{tg}\theta)],$$

где α_1 — заданная функция, $\alpha_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$; ε — параметр, $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$.

Теорема 3. *Если $n \leqslant 0$, то в семействе векторных полей $\overline{L}_{\alpha_\varepsilon}$, определяемых формулой* (4), *существует не более чем счетное множество собственных векторных полей $\overline{L}_{\alpha_{\varepsilon k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, условия* (2), *сходящихся при $k \to \infty$ к нормали поверхности S_f.*

Теорема 4. *Если $n>0$, то поверхность S_f, подчиненная внешней связи*

$$\overline{U}|_{M_0}=0, \quad \oint\limits_{\partial S_f} (\overline{V}\overline{n})\cos^{-1}\theta\, ds=0, \quad (\overline{V}\overline{L}_{\alpha_\varepsilon})|_{\partial S_f}=0,$$

где M_0 — точка поверхности S_f, $\overline{L}_{\alpha_\varepsilon}$ определены по формуле (4), *для всех значений параметра ε, исключая, быть может, дискретный ряд значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ $(0<|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon_2|\leqslant\ldots)$, является кинематически сверхоптимально жесткой.*

Пусть $\overline{\nu}$ — направление на поверхности, сопряженное направлению края ∂S_f, ориентированное так, что $\{\overline{t}, \overline{n}, \overline{\nu}\}$ — правый триедр, $\overline{\eta}$ — вектор тангенциальной нормали ∂S_f, $(\overline{t}\overline{n}\overline{\eta})>0$.

Теорема 5. *Пусть $\overline{L}=\cos\alpha\overline{L}_0-\sin\alpha\overline{n}$, где*

$$(\overline{L}_0\overline{\nu})>0, \quad a\,\mathrm{tg}\,\theta<\mathrm{tg}\,\alpha<\infty.$$

Тогда векторное поле $\overline{L}$ не является собственным для условия обобщенного поворота граничной полосы.

Теорема 6. *Среди заданного вдоль края ∂S_f поверхности S_f однопараметрического семейства векторных полей*

$$\overline{L}_{\alpha_\varepsilon}=\cos\alpha_\varepsilon\overline{\eta}-\sin\alpha_\varepsilon\overline{n},$$

где $\alpha_\varepsilon=\mathrm{arc\,tg}\,(\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\alpha_1)$, α_1 — заданная функция, $\alpha_1\in(0, \pi/2)$, ε — параметр, $\varepsilon\in(-\infty, \infty)$, существует по крайней мере один собственный вектор граничного условия (2).

Можно доказать существование таких функций α_1, фигурирующих в теореме 6, что собственные векторные поля условия (2) в семействе $\overline{L}_{\alpha_\varepsilon}$ образуют точно счетное множество $\{\overline{L}_{\alpha_{\varepsilon_k}}\}$, при этом $\alpha_{\varepsilon_k}\to\pi/2+0$ при $k\to\infty$.

3°. Характер внешней связи (3) в предположении $\overline{l}=\overline{k}$, $\overline{L}=\overline{n}$, где $\overline{k}$ — единичный вектор оси Oz, $\alpha^2+\beta^2\neq0$, дается следующей теоремой.

Теорема 7. *Пусть $\varkappa=\mathrm{Ind}\,(\alpha+i\beta)$. Если $\varkappa\geqslant0$, то для поверхности S_f внешняя связь*

$$R_0(\overline{U}, \overline{V})\equiv\alpha(\overline{U}\overline{k})+\beta(\overline{V}\overline{n})=\gamma$$

является квазикорректной с $(2\varkappa+3)$ степенями свободы. Если $\varkappa<0$, то условие $R_0(\overline{U}, \overline{V})=\gamma$ не является квазикорректным, в частности, условие $R_0(\overline{U}, \overline{V})=0$ обеспечивает сверхоптимальную жесткость поверхности S_f; неоднородная связь совместима с бесконечно малыми изгибаниями поверхности S_f тогда и только тогда, когда функция γ удовлетворяет $(2|\varkappa|-1)$ условиям разрешимости.

Из теоремы 7 вытекает, что при $\varkappa<0$ функция $\gamma\equiv R_0(\overline{U}, \overline{V})$ на ∂S_f при бесконечно малом изгибании поверхности S_f имеет по крайней мере две, а при $\varkappa<-1$ четыре перемены знака.

4°. Определим вдоль края ∂S_f поверхности S_f однопараметрическое семейство векторных полей $\overline{l}(\varepsilon)$, положив

$$\overline{l}(\varepsilon)=\alpha_1\overline{k}+\varepsilon\alpha_2\overline{l}_0,$$

где α_1, α_2 — заданные функции, $\overline{l}_0$ — заданное векторное поле, $\overline{l}_0\in S_f$, $|\overline{l}_0|=1$; ε — параметр, $\varepsilon\in(-\infty; \infty)$.

Рассмотрим внешнюю связь

$$R_1(\overline{U}, \overline{V})\equiv\alpha(\overline{U}\overline{l}(\varepsilon))+\beta(\overline{V}\overline{n})=\gamma,$$

где $\alpha^2\alpha_1^2+\beta^2\neq0$. Обозначим через $\varkappa_1=\mathrm{Ind}\,(\alpha\alpha_1+i\beta)$. Характер связи $R_1(\overline{U}, \overline{V})=\gamma$ в зависимости от параметра ε определяется следующими теоремами.

Теорема 8. *Пусть $\varkappa_1\geqslant0$. Тогда векторные поря $\overline{l}(\varepsilon)$, $\varepsilon\in(-\infty, \infty)$, для всех значений ε, исключая, быть может, дискретный ряд значений $\varepsilon=\varepsilon_k$*

$(0<|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon_2|\leqslant\ldots)$, *порождают для поверхности* S_f *квазикорректную связь* $R_1(\overline{U},\overline{V})=\gamma$ *с* $(2\varkappa_1+3)$ *степенями свободы.*

Теорема 9. *Пусть* $\varkappa_1<0$. *Тогда для всех* ε, $\varepsilon\in(-\infty,\infty)$, *внешняя связь* $R_1(\overline{U},\overline{V})=\gamma$ *поверхности* S_f, *с закрепленной в касательной плоскости точкой, не является квазикорректной. Векторные поля* $\overline{l}(\varepsilon)$ *для всех* ε, *исключая, быть может, дискретный ряд значений* $\varepsilon=\varepsilon_k$, $k=1,2,\ldots$, *порождают для поверхности* S_f, *с закрепленной в касательной плоскости точкой, некорректную жесткую связь* $R_1(\overline{U},\overline{V})=0$.

5^0. Исследование внешней связи (3) при общих предположениях относительно векторных полей $\overline{l}$ и $\overline{L}$ можно провести следующим образом. Пусть

$$\overline{L}(\varepsilon)=\beta_1\overline{n}+\frac{1}{\varepsilon}[\overline{L}_0+\beta_2\overline{n}]$$

— однопараметрическое семейство векторных полей вдоль края поверхности S_f. Здесь $\overline{L}_0$ — произвольно заданное векторное поле, $\overline{L}_0\neq0$, $\overline{L}_0\in S_f$, β_1 — произвольно заданная функция контура ∂S_f, β_2 — специальным образом подобранная функция, ε — параметр, $\varepsilon\in\{(-\infty,\infty)\setminus0\}$. Обозначим через $n=\operatorname{Ind}\overline{L}_0$. Рассмотрим внешнюю связь $R_2(\overline{U},\overline{V})\equiv\alpha(\overline{U}\overline{l})+\beta(\overline{V}\overline{L}(\varepsilon))=$ $=\gamma$ поверхности S_f. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 10. *Пусть* $n\leqslant0$, $\beta\neq0$. *Тогда внешняя связь* $R_2(\overline{U},\overline{V})=\gamma$ *поверхности* S_f *квазикорректна с* $(2|n|+5)$ *степенями свободы для всех* ε, $\varepsilon\in\{(-\infty,\infty)\setminus0\}$, *исключая, быть может, дискретный ряд значений* $\varepsilon=\varepsilon_k$, $k=1,2,\ldots$

Теорема 11. *Пусть* $n<0$, $\beta\neq0$. *Тогда поверхность* S_f, *подчиненная внешней связи*

$$\overline{U}|_{M_0}=0,\quad(\overline{V}\overline{n})|_{M_0}=0,\quad R_2(\overline{U},\overline{V})|_{\partial S_f}=0,$$

для всех значений ε, *исключая, быть может, дискретный ряд значений* $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots$, *является кинетически сверхоптимально жесткой.*

Доказательство приведенных результатов проводится методами книги ([1]). Некоторые результаты этой статьи (теорема 7) были доложены на V Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии (1972 г., Самарканд).

Ростовский государственный университет

Поступило 23 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [2] В. Т. Фоменко, ДАН, 187, № 2 (1969). [3] В. Т. Фоменко, Матем. сборн., 72 (114), № 3 (1967). [4] В. Т. Фоменко, Матем. сборн., 80 (122), № 2 (10) (1969).