Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 517.51:519.5

МАТЕМАТИКА

Б. П. КУФАРЕВ

ПОТЕНЦИАЛЫ И СООТВЕТСТВИЕ ГРАНИЦ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 9 VII 1973)

Пусть G — произвольная односвязная область z-плоскости R^z. Обозначим через $\widetilde{W}_p{}^1(G)$ (соответственно $\widetilde{W}_\infty{}^1(G)$) класс всех непрерывных на G функций $r(z)$, имеющих в области G обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные первого порядка по x и y, суммируемые в степени $p\geqslant 1$ (соответственно существенно ограниченные) на любом компакте $K\subset G$.

Если f — отображение G в R^2, $f=u+iv$, то будем говорить, что $f\in\widetilde{W}_p{}^1(G)$, если $u, v\in\widetilde{W}_p{}^1(G)$.

Положим

$$\lambda(z,f)=\frac{(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)^{1/2}}{1+|f|^2}$$

и потребуем, чтобы выполнялись следующие условия (1) и (2):

$$\int\limits_G \varphi(\lambda(z,f))\,dx\,dy\leqslant M<\infty, \tag{1}$$

где $\varphi(h)$ — функция, определенная для $h\geqslant 0$, $\varphi(h)\geqslant 0$, $\varphi(0)=0$, $\varphi''(h)>0$;

$$\int\limits_0 u\varphi(1/u)\,du=\infty. \tag{2}$$

Такие отображения f введены в рассмотрение в работах ([1], [2]). В. М. Миклюков ([2]) перенес на топологические отображения этого класса основные результаты книги Г. Д. Суворова ([3]). В частности, отображения f этого класса индуцируют C-соответствие границ по Каратеодори: каждому простому концу ([4]) области G можно поставить в соответствие единственный простой конец области $D=f(G)$; более того, если $\widetilde{G}$ — компактификация области G простыми концами, то отображение f продолжаемо до непрерывного отображения $\widetilde{G}$ на $\widetilde{D}$.

На примере гомеоморфизма f: $z\to z+e^{i\arg z}$ (G — верхняя половина единичного круга z-плоскости) можно показать, что:

1) при выполнении только условия (1) еще нельзя доказать C-соответствие для всех простых концов области G, тем более нельзя получить оценку искажения типа (([3]), стр. 62) относительного расстояния;

2) при нарушении одного из условий (1) или (2) точка $\omega\in\partial G$ может не быть точкой продолжения по Каратеодори отображения f (определение см. ниже).

Возникает вопрос о «массивности» множества тех простых концов области G, которым при топологическом отображении f соответствуют концы области D, не являющиеся простыми.

Оказывается, что при некоторых ограничениях на f это нарушение естественного соответствия границ может быть лишь на некотором исключительном множестве.

1. Локальные условия. Сформулируем сначала локальные условия граничного соответствия по простым концам.

Точку $z\in\partial G$ назовем **главной точкой границы**, если существует простой конец e, для которого z является главной точкой. Напомним, что точка $\omega\in\partial G$ является главной точкой простого конца $e\in\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда существует определяющая простой конец e последовательность сечения (β_n) области G, для которой β_n есть дуги концентрических окружностей радиуса r_n с центром ω и $r_n\to 0$ [4].

Легко видеть, что любая точка $\zeta\in\partial G$ является предельной для главных. В этом смысле совокупность Ω всех главных точек ∂G определяет конфигурацию области: $\overline{\Omega}=\partial G$.

Лемма. *Пусть функция* $\rho(x, y)\in C(G)$ *имеет обобщенные производные первого порядка по* x *и* y, *существенно ограниченные в области* G; *причем для* $z\in G$

$$\alpha<\rho(z)<\beta,$$

где $\alpha=\inf_G \rho(z)$, $\beta=\sup_G \rho(z)$. *Пусть, далее,* $k(u)$ — *непрерывная и положительная на интервале* (α, β) *функция и* $\gamma\in(\alpha, \beta)$. *Положим*

$$r(z)=\int_{\gamma}^{\rho(z)} k(u)\,du.$$

Тогда функция $r(z)\in \overline{W}^1_\infty(G)$ *и* $|\nabla r|=k(\rho)\cdot|\nabla\rho|$.

Пусть теперь $t_1=\inf_G r(z)$, $t_2=\sup_G r(z)$ и

$$\underset{t}{G}=\{z\in G\colon\ r(z)=t\}.$$

Тогда применение теорем 1 и 2 работы [1] дает

$$\int_a^b l\left(\underset{t}{G}\right)\varphi\left(\frac{l\left[f\left(\underset{t}{G}\right)\right]}{l\left(\underset{t}{G}\right)}\right)dt\leqslant\iint\limits_{r^{-1}(a,\,b)}\varphi(\lambda(z, f))\cdot|\nabla r|\,dx\,dy; \tag{3}$$

здесь $t_1\leqslant a<b\leqslant t_2$, $l(\underset{t}{G})$ — длина $\underset{t}{G}$, $l[f(\underset{t}{G})]$ — сферическая длина кривой

$$w=f(z),\quad z\in \underset{t}{G},$$

которую для почти всех t можно вычислять по формуле

$$l\left[f\left(\underset{t}{G}\right)\right]=\int\limits_{\underset{t}{G}}\frac{|\partial f/\partial l|}{1+|f|^2}dl,$$

поскольку $f\in \overline{W}_1^1(G)$.

Пусть теперь $\omega\in\partial G$ — конечная точка, $\rho(z)=|z-\omega|$, так что $\alpha=0$ и $\gamma\in(0, \beta)$. Тогда, применяя (3) и лемму, можно получить неравенство

$$\int_{t_1}^{0} 2\pi\vartheta(t)\cdot\varphi\left(\frac{l\left[f\left(\underset{t}{G}\right)\right]}{2\pi\vartheta(t)}\right)dt\leqslant\iint\limits_{r^{-1}(t_1,\,0]}\varphi(\lambda(z, f))\,k(|z-\omega|)\,dx\,dy,$$

где $\vartheta(t)$ — функция, обратная к

$$t(\vartheta)=\int_{\gamma}^{\vartheta}k(u)\,du,\quad \vartheta\in(0,\beta).$$

Теорема 1. *Пусть функция* $k(u)$ *удовлетворяет условию: существует некоторая положительная на* $(0, 1]$ *функция* $q(c)$ *такая, что*

$$k(cu)\geqslant q(c)\cdot k(u)\quad \forall c\in(0, 1],\quad \forall u\in(0, \gamma]. \tag{4}$$

Предположим, что $f \in W_1^1(G)$,

$$U(\omega, \gamma) = \iint\limits_{G(\omega,\gamma)} \varphi(\lambda(z, f))\, k(|z-\omega|)\, dx\, dy < \infty, \qquad G(\omega, \gamma) = \{z \in G \colon |z-\omega| < \gamma\},$$

$$\int\limits_0^\gamma u\varphi\left(\frac{1}{u}\right) k(u)\, du = \infty.$$

Тогда

$$\inf_{\vartheta \in (0,\gamma)} l[f(G_\vartheta^\rho)] = 0, \qquad G_\vartheta^\rho = \{z \in G \colon |z-\omega| = \vartheta\}.$$

Определение. Пусть f — топологические отображения односвязной области G и ω — некоторая главная точка границы ∂G. Назовем ее точкой продолжения f по Каратеодори (или C-точкой f), если всякий простой конец $e \in \tilde{G}$, для которого точка ω является главной, преобразуется при отображении f в простой конец области $D = f(G)$ в том смысле, что отображение $f\colon G \to D$ можно продолжить до непрерывного отображения $\tilde{f}\colon G \cup \{e\} \to \tilde{D}$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \tilde{W}_1^1(G)$ — *топологическое отображение односвязной области* G, $\omega \in \partial G$ — *конечная главная точка,* $0 \in G$ *и* $0 < \gamma < \rho(0, \partial G)$. *Если*

$$U(\omega, \gamma) < \infty, \qquad \int\limits_0^\gamma u\varphi\left(\frac{1}{u}\right) k(u)\, du = \infty,$$

то ω *есть* C*-точка* f.

2. Соответствие границ в целом. Пусть функция $k(u)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) k определена при $u > 0$, конечна, положительна и непрерывна, не возрастает и $\lim\limits_{u \to 0} k(u) = \infty$;

б) $\int\limits_0 k(u)\, u\, du < \infty$.

Очевидно, для такой функции k условие (4) выполняется.

Пусть μ — конечная мера в R^2. Рассмотрим ее потенциал

$$U_k^\mu(\omega) = \int\limits_{R^2} k(|z-\omega|)\, d\mu(z).$$

Т. Угаэри (5) доказано, что для рассматриваемых нами ядер $k(|z-\omega|)$ имеет место обобщенный принцип максимума (см. также (6) или (7), стр. 443—447). Поэтому можно доказать, что множество

$$E = \{\omega \in R^2 \colon U_k^\mu(\omega) = \infty\}$$

имеет нулевую C_k-емкость.

Обозначим через $BL^\varphi(k)$ множество всех отображений $f \in \tilde{W}_1^1(G)$, обладающих свойством:

$$\iint\limits_{G(\vartheta)} \varphi(\lambda(z, f))\, dx\, dy < \infty \quad \forall \vartheta > 0,$$

причем

$$\int\limits_0 u\varphi\left(\frac{1}{u}\right) k(u)\, du = \infty;$$

здесь $G(\vartheta) = \{z \in G \colon |z| < \vartheta\}$.

Теорема 3. *Если* f — *топологическое отображение класса* $BL^\varphi(k)$ *односвязной области* $G \subseteq R^2$, *то* k*-квазивсе главные точки границы* ∂G *яв-*

ляются C-точками f, т. е. те главные точки, для которых может нарушаться соответствие границ по Каратеодори (простой конец области G переходит в простой конец области D) образуют множество нулевой C_k-емкости.

Замечание 1. Теоремы 1, 2 и 3 справедливы для $\varphi(h)=h$.

Следствие 1. *Пусть* $f\in\tilde{W}_1^1(G)$ — *топологическое отображение,* $C\subset\partial G$ — *множество его* C-*точек и* $\lambda(z, f)\in L_p(g)$ *для любой ограниченной подобласти* $g\subset G$, $1\leqslant p<2$.

Тогда $C_p(\Omega\setminus C)=0$. *Здесь емкость* C_p *соответствует ядру* $k_p(u)=u^{p-2}$.

Отсюда в силу известной теоремы (см., например, ([7]), стр. 245) следует, что множество $\Omega\setminus C$ имеет хаусдорфову размерность $\leqslant 2-p$. При $p=1$ это очевидно для областей G со спрямляемой границей. Напомним, однако, что граница односвязной области может быть гомеоморфной окружности и в то же время иметь положительную 2-меру Хаусдорфа (([8]), стр. 36—45).

Следствие 2. *Пусть* $f\in\tilde{W}_1^1(G)$ — *топологическое отображение,* $p\geqslant 1$, $\alpha\leqslant p$. *Если потенциал*

$$\iint_G [\lambda(z,f)]^p\cdot|z-\omega|^{\alpha-2}dx\,dy<\infty \quad \forall\omega\in\Omega,$$

то отображение $f{:}G\to D$ *индуцирует* C-*соответствие границ.*

Теорема 4. *Пусть*

1) *функция* $k(u)$ *конечна, положительна, непрерывна и не возрастает при* $u>0$;

2) *функция* $\varphi(u)$ *удовлетворяет условию: существует непрерывная, строго возрастающая положительная на* $(0, 1)$ *функция* $s(c)$ *такая, что*

$$\varphi(cu)\geqslant s(c)\cdot\varphi(u) \quad \forall c\in(0, 1), \quad \forall u\in[1, \infty);$$

3) $\int_0 u\varphi(1/u)k(u/2\pi)\,du=\infty$.

Пусть, далее, область G *ограничена,* $f\in\tilde{W}_1^1(G)$ — *топологическое отображение и*

$$\iint_G \varphi(\lambda(z,f))\cdot k(|z-\omega|)\,dx\,dy\leqslant M<\infty \quad \forall\omega\in\bar{G}.$$

Тогда $f(z)$ *продолжаемо до непрерывного отображения* $\bar{G}$ *на* $\tilde{D}$, *причем имеет место оценка искажения* $\rho_D(w_1, w_2)\leqslant F\circ\rho_G(z_1, z_2)$ *относительного расстояния* ρ_G *между достаточно близкими точками* $z_1, z_2\in G$. *Здесь*

$$F(t)=s^{-1}\left(\frac{M}{\int_t^a u\varphi(1/u)k(u/2\pi)\,du}\right),$$

и a *зависит от* G, D, φ *и* k (*ср.* ([3]), *стр.* 62, *и* ([2])).

Замечание 2. Очевидно, все результаты работы справедливы для конечносвязных областей.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики
при Томском государственном университете
им. В. В. Куйбышева

Поступило
6 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. П. Куфарев*, ДАН, т. 181, № 2, 282 (1968). [2] *В. М. Миклюков*, ДАН, т. 183, № 4, 772 (1968). [3] *Г. Д. Суворов*, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, 1965. [4] *C. Caratheodory*, Math. Ann., v. 73, 323 (1913). [5] *T. Ugaheri*, Japan. J. Math., v. 20, 37 (1950). [6] *H. Wallin*, Ark. Math., v. 5, 55 (1963). [7] *Н. С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала, М., 1966. [8] *В. В. Голубев*, Однозначные аналитические функции, М., 1961.