Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

Б. А. КУШНЕР

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ВЫЧИСЛИМЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 VII 1973)

1. В настоящей заметке продолжается начатое в ([1]) изучение П-операторов (операторов над псевдочислами). Напомним, что с традиционной точки зрения псевдочисла суть коды алгорифмических сходящихся в себе последовательностей рациональных чисел, а П-операторы — алгорифмические операторы над такими последовательностями, сохраняющие равенство псевдочисел.

Мы используем определения и обозначения ([1]). В частности, под алгорифмами понимаются нормальные алгорифмы в некотором достаточно широком алфавите. Алгорифм $\mathfrak{A}$ называется алгорифмом типа $M_1 \dashrightarrow M_2$, где M_1, M_2 — некоторые множества слов, если он переводит всякое слово из M_1, к которому применим, в слово из M_2. Если сверх того $\mathfrak{A}$ применим к любому слову из M_1, то он называется алгорифмом типа $M_1 \to M_2$. Через H, R, D и П обозначаются соответственно множества натуральных, рациональных чисел, дуплексов и псевдочисел (см. ([1], [2])). Буквы x и q (возможно, с индексами) используются в качестве переменных соответственно по дуплексам и псевдочислам. Все рассматриваемые конструктивные функции (к.ф.) считаются везде определенными. К.ф. f называется *равномерно непрерывной* на сегменте $0\Delta 1$, если можно построить алгорифм δ типа $H \to H$ так, что при любом n и $x_1, x_2 \in 0\Delta 1$ таких, что $|x_1 - x_2| < 2^{-\delta(n)}$ выполняется $|f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n}$. Результаты обычно формулируются применительно к единичному сегменту, упоминания о котором часто опускаются.

Пункты 2—5 данной заметки выполнены в рамках конструктивной математики (исключение составляют замечания в п. 2 и 5). В п. 6 мы не придерживаемся конструктивной установки.

2. Легко видеть, что всякая псевдоравномерно непрерывная к.ф. (см. ([1])) может быть продолжена до П-оператора. С другой стороны, известные конструкции эффективно не равномерно непрерывных функций таковы, что получаемые с их помощью к.ф. не продолжимы до П-операторов (см. ([3], [4])). В связи с этим возникает вопрос о том, не является ли условие псевдоравномерной непрерывности необходимым для продолжимости к.ф. до П-оператора. Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1. *Можно построить к.ф. g и алгорифмы α_1, α_2 типа $H \to R$ так, что:*

1) *при любом i $\alpha_1(i)$, $\alpha_2(i) \in 0\Delta 1$, $|\alpha_1(i) - \alpha_2(i)| < 2^{-i}$, $g(\alpha_1(i)) - g(\alpha_2(i)) = 1$ (таким образом, g эффективно не равномерно непрерывна)*;

2) *существует* П-*оператор, продолжающий* g.

Теорема 1 легко вытекает из следующей представляющей самостоятельный интерес леммы.

Лемма 1. *Можно построить алгорифм γ типа $H \to R$ такой, что*:

1) $\forall k(\gamma(k) \in 0\Delta 1)$;

2) *для любого псевдочисла q можно найти натуральное i так, что* $\neg\neg\exists j \forall k(k \geqslant j \supset |\gamma(k) - q| \geqslant 2^{-i})$;

3) *осуществимы алгорифмы δ_1, δ_2 типа $D \to H$ такие, что при любом $x \in D$ и $k \geqslant \delta_1(x)$ выполняется $|\gamma(k) - x| \geqslant 2^{-\delta_2(x)}$.*

Доказательство этой леммы использует диагональную конструкцию и лемму 1 из работы ([5]).

Замечание. Лемма 1 интересна с точки зрения классической теоремы Вейерштрасса: γ дает пример ограниченной алгорифмической последовательности рациональных чисел, ни один частичный предел которой не может быть задан алгорифмической, сходящейся (хотя бы и не эффективно) последовательностью рациональных чисел.

Совершенно аналогично функции g можно построить неограниченную на $0\Delta 1$ к.ф., продолжимую до П-оператора.

Следствие 1. *Существуют эффективно не равномерно непрерывные на единичном сегменте П-операторы.*

3. Пусть C — множество псевдочисел, удовлетворяющих условию $\neg\neg\exists k\forall j(j\geqslant k\supset \underline{q}(j)=\underline{q}(k))$ ($\underline{q}$ означает задающий q алгорифм типа $H\to R$). Назовем C-интервалом слово вида $q_1\nabla q_2$, где $q_1<q_2$ и q_1, $q_2\in C$. Множество C-интервалов обозначим через J. Имеет место следующий аналог теоремы о сингулярных покрытиях ([4]).

Теорема. 2. *Для любого n можно построить алгорифм Φ типа $H\to J$ так, что*

1) $\sum\limits_{i=0}^{k}|\Phi(i)|<2^{-n}$ *при всяком* k;

2) *невозможно псевдочисло q такое, что* $\forall i(q\notin\Phi(i))$;

3) *осуществим алгорифм δ типа $D\to H$ такой, что* $\forall x(x\in\Phi(\delta(x)))$.

Теорема 2 доказывается с помощью одной диагональной конструкции В. Г. Жарова. Из нее можно вывести следствие 1. Эта теорема также показывает, что для псевдочисел не выполняется лемма Бореля (некоторый аналог леммы Бореля может быть получен при рассмотрении покрытий псевдочисел рациональными интервалами).

4. Относительно теорем о средних значениях П-операторы ведут себя аналогично конструктивным функциям ([6]). Обозначим через h кусочно-линейный П-оператор такой, что $h(q)=0$ при $1/3\leqslant q\leqslant 2/3$, $h(q)=q-2/3$ при $q\geqslant 2/3$, $h(q)=q-1/3$ при $q\leqslant 1/3$. Очевидно $h(1)=1/3$, $h(0)=-1/3$.

Теорема 3. *Невозможен алгорифм α, переводящий всякое псевдочисло q такое, что $-1/3<q<1/3$, в псевдочисло из $0\Delta 1$, при котором $h(\alpha(q))=q$.*

Следствие 2. *Невозможен алгорифм, находящий по всякому П-оператору, принимающему отрицательное значение в точке 0 и положительное значение в точке 1, псевдочисло из $0\Delta 1$, обращающее этот оператор в ноль.*

С другой стороны, если П-оператор Ψ не обращается тождественно в ноль ни на каком интервале, включенном в $0\Delta 1$, и $\Psi(0)\cdot\Psi(1)<0$, то можно построить псевдочисло $q\in 0\Delta 1$ так, что $\Psi(q)=0$. Отсюда вытекает

Следствие 3. 1) *Невозможен П-оператор Ψ такой, что $\Psi(0)\cdot\Psi(1)\leqslant 0$ и $\Psi(q)\neq 0$ при любом $q\in 0\Delta 1$;*

2) *невозможен П-оператор Ψ и псевдочисла q_1, q_2, q_3 такие, что $q_1\leqslant q_2$, $\Psi(q_1)\leqslant q_3\leqslant\Psi(q_2)$ и $\Psi(q)\neq q_3$ при $q_1\leqslant q\leqslant q_2$.*

5. Теорема 1 показывает, что продолжимость вычисляющего к.ф. алгорифма на псевдочисла не обеспечивает никаких свойств равномерной непрерывности этой к.ф. Положение, однако, существенно меняется при рассмотрении вычислений к.ф. с помощью частично-рекурсивных операторов. Приведем необходимые определения. Под деревом будем понимать множество кортежей натуральных чисел, которое вместе с каждым своим кортежем содержит и все его начала. Двухместный предикат Γ назовем функциональным (над H), если $\forall n\neg\neg\exists m\Gamma(n,m)$ и $\forall nkl\,((\Gamma(n,k)\&\Gamma(n,l))\supset k=l)$. Кортеж натуральных чисел $i_0*\ldots*i_n$ назовем отрезком Γ, если при $0\leqslant k\leqslant n$ выполняется $\Gamma(k,i_k)$. Функциональный предикат называется путем в дереве M, если всякий его отрезок принадлежит M. Путь Γ называется вычислимым, если существует алгорифм α типа $H\to H$ такой, что $\forall i(\Gamma(i,\alpha(i)))$, и полувычис-

л и м ы м, если существует алгорифм β типа $H^2 \to H$ такой, что $\forall n \neg\neg \exists m \forall i (i \leqslant m \supset \Gamma(n, \beta(n, i)))$. Ясно, что β удовлетворяет условию сходимости $\forall n \neg\neg \exists k \forall ij (i, j \geqslant k \supset \beta(n, i) = \beta(n, j))$. Пусть T_∞ — множество всех кортежей натуральных чисел. Алгорифм λ типа $T_\infty \to H$ называется (1,0)-ф у н к ц и о н а л о м, если для любых двух кортежей s_1, s_2 таких, что s_1 — начало s_2 и $!\lambda(s_1)$, $!\lambda(s_2)$, выполняется $\lambda(s_1) = \lambda(s_2)$. Будем говорить, что (1, 0)-функционал λ о п р е д е л е н на функциональном предикате Γ и принимает на нем з н а ч е н и е n (запись $\lambda\langle\Gamma\rangle = n$), если не может не найтись отрезок s этого предиката такой, что $!\lambda(s)$ и $\lambda(s) = n$. Алгорифм Ψ типа $H \times T_\infty \to H$ назовем (1,1)-ф у н к ц и о н а л о м, если $\widetilde{\Psi}_k$ есть (1,0)-функционал при любом k. Будем считать, что Ψ о п р е д е л е н на предикате Γ, если на нем определены все (1,0)-ф у н к ц и о н а л ы $\widetilde{\Psi}_k$. З н а ч е н и е м Ψ на Γ является предикат $\Psi\langle\Gamma\rangle$ такой, что $\Psi\langle\Gamma\rangle(n, m) \equiv m = \widetilde{\Psi}_n\langle\Gamma\rangle$. Введенные только что понятия представляют собой конструктивную версию частично-рекурсивных функционалов и операторов над везде определенными функциями; этот подход заимствован нами из [7]. Будем говорить, что (1,1)-функционал п о л о н на дереве M, если он определен на любом полувычислимом пути в M.

З а м е ч а н и е. Если все ярусы дерева M финитны, то из полноты Ψ на M следует определенность Ψ на всех классических путях в M.

Обозначим через T_2 множество всех кортежей, составленных из нулей и единиц, а через $T_{\infty,2}$ — множество всех кортежей, у которых лишь первая компонента может быть отлична от 0 и 1. Фиксируем какую-нибудь алгорифмическую однозначную нумерацию сегментов вида ${}^2/_3 i \Delta {}^2/_3 i + {}^2/_3$, ${}^1/_3 i \Delta {}^1/_3 i + {}^2/_3$, где i — любое целое число. Сегмент с номером n обозначим через τ_n. Будем считать, что $\tau_0 = 0\Delta{}^2/_3$, $\tau_1 = {}^1/_3\Delta 1$. Сопоставим теперь каждому кортежу $s \in T_{\infty,2}$ рациональный сегмент θ_s. Именно, для одномерного кортежа n положим $\theta_n = \tau_n$, и если $\theta_s = a\Delta b$, то $\theta_{s*0} = a\Delta a + {}^2/_3(b-a)$, $\theta_{s*1} = a + {}^1/_3(b-a)\Delta b$. Пусть $p \in \Pi \cup D$, Γ — путь в $T_{\infty,2}$. Скажем, что Γ о п р е д е л я е т p (запись $p = \Gamma$), если для любого отрезка s этого пути $p \in \theta_s$. Нетрудно убедиться, что:

1) для любого $x \in D$ можно построить вычислимый путь Γ в $T_{\infty,2}$ так, что $x = \Gamma$; 2) по всякому вычислимому пути Γ в $T_{\infty,2}$ можно найти $x \in D$ так, что $x = \Gamma$ (ясно, что данный путь может с точностью до равенства определять лишь одно число). Используя теорему о полноте псевдочисел [1], можно показать, что аналогичное утверждение верно для псевдочисел с заменой вычислимых путей на полувычислимые. Легко видеть, что при представлении чисел из единичного сегмента можно ограничиться путями в T_2

Пусть f — к.ф., Ψ — (1,1)-функционал. Скажем, что Ψ в ы ч и с л я е т f (на $0\Delta 1$), если для любого $x \in 0\Delta 1$ и вычислимого пути Γ в T_2 таких, что $\Gamma = x$ выполняется $f(x) = \Psi\langle\Gamma\rangle$. Аналогичное определение принимается для П-операторов с заменой D на Π и вычислимых путей на полувычислимые. В силу основной теоремы работы [8] всякая к.ф. вычисляется некоторым (1,1)-функционалом.

Т е о р е м а 4 (ср. [9, 10]). *К.ф. f равномерно непрерывна на $0\Delta 1$ тогда и только тогда, когда существует полный на T_2 (1,1)-функционал, вычисляющий f.*

Теорема 4 легко следует из теорем равномерной непрерывности полных функционалов, публикуемых в другой работе автора. Отметим, что полный функционал, вычисляющий f согласно теореме 4, строится так, что он вычисляет f (точнее ее продолжение) и на всех псевдочислах из $0\Delta 1$. Из теоремы 4 следует, что (1,1)-функционал, вычисляющий функцию g, построенную согласно теореме 1, не может быть полным.

6. Приведенные результаты допускают простую интерпретацию в терминах арифметической иерархии (все упоминаемые функции, за исключением одного оговоренного случая, считаются везде определенными, $\Delta_n =$

$=\Sigma_n \cap \Pi_n$, функции трактуются как отношения над H). Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ множество n-местных общерекурсивных функций. Нетрудно убедиться, (см. ([11], [12])), что функция φ принадлежит классу Δ_2 тогда и только тогда, когда существует $\beta \in \mathfrak{R}_2$ такая, что $\forall n(\varphi(n) = \lim\limits_{m\to\infty} \beta(n, m))$. Таким образом. полувычислимые пути (п. 5) могут быть охарактеризованы как Δ_2-пути, а псевдочисла — как Δ_2-числа (это открывает возможность доказательств теорем о псевдочислах методом релятивизации). Лемму 1 можно интерпретировать как пример вычислимой последовательности рациональных чисел из единичного сегмента, все частичные пределы которой не принадлежат классу Δ_2. Вместе с тем всякая такая последовательность имеет частичный предел в классе Δ_3-чисел.

Пусть Ψ — функционал с натуральными значениями, определенный на всех Δ_2-функциях. Назовем Ψ *эффективным* Δ_2-*функционалом*, если можно построить частично-рекурсивную функцию ω так, что для любой $\varphi \in \Delta_2$ и $\beta \in \mathfrak{R}_2$ таких, что $\forall n(\varphi(n) = \lim\limits_{m\to\infty} \beta(n, m))$, $\omega([\beta])$ определено, $\{\omega([\beta])\} \in \mathfrak{R}_1$ и $\Psi(\varphi) = \lim\limits_{i\to\infty} \{\omega([\beta])\}(i)$ (здесь $[\beta]$ — гёделев номер β, $\{k\}$ означает одноместную частично-рекурсивную функцию с гёделевым номером k). Ясно, что каждый частично-рекурсивный функционал, определенный на Δ_2, порождает эффективный Δ_2-функционал. Конструкция теоремы 1, проведенная для бэровского пространства общерекурсивных функций, позволяет получить пример эффективного функционала (см. ([8]), стр. 332), определенного на всем $\mathfrak{R}_1$, продолжимого до эффективного Δ_2-функционала и не совпадающего на Δ_2 ни с каким частично-рекурсивным функционалом (ср. ([8], [13])).

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. А. Кушнер*, ДАН, т. 208, № 5, 1031 (1973). [2] *Н. А. Шанин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 67, 15 (1962). [3] *И. Д. Заславский*, Там же, т. 67, 385 (1962). [4] *И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин*, Там же, т. 67, 458 (1962). [5] *Б. А. Кушнер, Г. С. Цейтин*, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 8, 107 (1968). [6] *Г. С. Цейтин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 67, 362 (1962). [7] *В. А. Успенский*, УМН, т. 12, 1, 99 (1957). [8] *Г. С. Цейтин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 67, 295 (1962). [9] *A. Grzegorczyk*, Fund. math., t. 42, 168 (1955). [10] *D. Lacombe*, C. R., v. 240, 26, 2478 (1955); v. 241, 1, 13 (1955); v. 241, 2, 151 (1955). [11] *E. Gold*, J. Symb. Logic, v. 30, 28 (1965). [12] *H. Putnam*, J. Symb. Logic, v. 30, 1, 49 (1965). [13] *G. Kreisel, D. Lacombe, J. Schoenfield*, C. R., v. 245, 4, 399 (1957).