Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 3

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

В. Я. ГУТЛЯНСКИЙ

О ПРИНЦИПЕ ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 I 1973)

1. Рассматриваются квазиконформные отображения плоских областей, конформные в некоторой части области своего задания. Изучение метрико-геометрических свойств таких отображений, представляющих большой интерес как для теории однолистных аналитических функций, так и для теории квазиконформных отображений, было начато в работах С. Л. Крушкаля ([1], [2]), Р. Кюнау ([3]), О. Лехто ([4]). На этом пути установлены глубокие связи между экстремальными проблемами для конформных и квазиконформных отображений ([1–7]).

В настоящей работе на рассматриваемые классы квазиконформных гомеоморфизмов распространяется один из наиболее развитых принципов теории однолистных аналитических функций — принцип площадей. Основная теорема представляет собой аналог обобщенной теоремы площадей Н. А. Лебедева и И. М. Милина ([8]) (см. также ([9]), стр. 16) и содержит последнюю как предельный случай при $k\to 1$.

2. Пусть Σ — класс однолистных аналитических функций в области $B=\{\zeta\colon |\zeta|>1\}$ с разложением

$$F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\alpha_1\zeta^{-1}+\ldots \tag{1}$$

Обозначим через $M(k)$ совокупность квазиконформных гомеоморфизмов $w=F(\zeta)$ комплексной плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ на себя, которые являются решениями уравнения Бельтрами $F_{\bar\zeta}=\mu(\zeta)F_\zeta$ с комплексной измеримой характеристикой $\mu(\zeta)$, $|\mu(\zeta)|\leqslant k<1$, и имеют обобщенные производные $F_{\bar\zeta}$, $F_\zeta\in L^2$.

Условимся говорить, что гомеоморфизм $F(\zeta)$ из $M(k)$ принадлежит классу $\Sigma(k)$, если его сужение на область B принадлежит классу Σ.

При каждом $\rho\in(0,\infty)$ через $D_\rho(F)$ будем обозначать область, содержащую точку $w=\infty$ и ограниченную линией уровня $L_\rho(F)=\{w\colon w=F(\rho e^{i\varphi}),\ 0\leqslant\varphi<2\pi\}$, а через $d_\rho(F)$ — область, являющуюся дополнением замыкания $\overline{D}_\rho(F)$ до всей w-плоскости.

Теорема. *Пусть $F(\zeta)\in\Sigma(k)$ и $Q(w)$ — произвольная, отличная от постоянной функция, регулярная в области $d_\rho(F)$, $\rho>1$. Функция $f(\zeta)=Q(F(\zeta))$ регулярна в кольце $1<|\zeta|<\rho$ и разлагается в этом кольце в ряд Лорана*

$$f(\zeta)=\sum_{n=1}\omega_n\zeta^{-n}+\sum_{n=0}\gamma_n\zeta^n. \tag{2}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|\omega_n|^2\leqslant k^2\sum_{n=0}^{\infty}n|\gamma_n|^2. \tag{3}$$

Знак равенства имеет место в том и только том случае, если

$$f(\zeta)-\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\zeta^n=\begin{cases} k\xi\sum_{n=1}\bar{\gamma}_n\zeta^{-n} & \text{для } |\zeta|>1 \\ k\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\gamma}_n\zeta^n & \text{для } |\zeta|\leqslant 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $\varepsilon=e^{2i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$.

Действительно, площадь σ римановой поверхности, являющейся образом круга $E=\{\zeta\colon |\zeta|<1\}$ при квазиконформном отображении $f(\zeta)=Q(F(\zeta))$, вычисляется по формуле

$$\sigma=\iint_E\frac{1-|\mu(\zeta)|^2}{|\mu(\zeta)|^2}|f_{\bar\zeta}(\zeta)|^2\,d\xi\,d\eta. \tag{5}$$

С другой стороны, по формуле Грина (см., например, ([9]), стр. 17)

$$\sigma=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=\rho}\overline{f(\zeta)}\,df(\zeta)=\pi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n|\gamma_n|^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|\omega_n|^2\Big). \tag{6}$$

Пусть D — комплексная плоскость ζ. Рассмотрим в $L^2(D)$ интегральные операторы ([10, 11])

$$T_E\delta=-\frac{1}{\pi}\iint_E\delta(\zeta)(\zeta-z)^{-1}\,d\xi\,d\eta,\qquad \Pi_E\delta=-\frac{1}{\pi}\iint_E\delta(\zeta)(\zeta-z)^{-2}\,d\xi\,d\eta.$$

В терминах этих операторов для функции $g(\zeta)=f(\zeta)-\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\zeta^n$ справедливы соотношения $g(\zeta)=T_Ef_{\bar z}(z)$, $g_\zeta(\zeta)=\Pi_Ef_{\bar z}(z)$, $\zeta\in D$ (см. ([10]), стр. 41, 73), и свойство изометричности оператора $\Pi_E\delta$ в $L^2(D)$ приводит к оценке

$$\iint_E|f_{\bar\zeta}|^2\,d\xi\,d\eta=\iint_D|g_\zeta|^2\,d\xi\,d\eta\geqslant\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|\omega_n|^2. \tag{7}$$

Из соотношений (5)—(7) немедленно следует неравенство (3), если заметить, что $|\mu(\zeta)|\leqslant k<1$ при $\zeta\in E$. Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $|\mu(\zeta)|=k$, и $g_\zeta(\zeta)=0$ п. в. в E. Отсюда следует, что в экстремальном случае

$$\mu(\zeta)=k\varepsilon\Big[\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{\gamma}_n\bar{\zeta}^{n-1}\Big]\Big/\Big[\sum_{n=1}^{\infty}n\gamma_n\zeta^{n-1}\Big],$$

если $|\zeta|\leqslant 1$, и $\mu(\zeta)=0$, если $|\zeta|>1$. Остается вычислить интеграл $T_Ef_{\bar z}(z)$ при $f_{\bar z}(z)=k\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{\gamma}_n\bar{z}^{n-1}$ (см. ([10]), стр. 43), чтобы найти вид функции $f(\zeta)$.

Замечание 1. Сформулированная теорема может быть значительно обобщена в различных направлениях (ср., например, с работами ([9, 12–14])). В частности, можно рассмотреть аналог теоремы в многосвязном случае или применить принцип площадей Н. А. Лебедева ([13]) для station неналегающих областей.

Следствие 1. *Пусть* $F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\alpha_1\zeta^{-1}+\ldots$ — *однолистная аналитическая функция в области* $|\zeta|>1$ *с квазиконформным продолжением на всю плоскость таким, что* $|\mu(\zeta)|\leqslant k<1$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|\alpha_n|^2\leqslant k^2. \tag{8}$$

Знак равенства имеет место только для функций вида

$$F(\zeta)=\begin{cases}\zeta+\alpha_0+ke^{2i\theta}\zeta^{-1} & \text{для } |\zeta|>1,\\ \zeta+\alpha_0+ke^{2i\theta}\bar{\zeta} & \text{для } |\zeta|\leqslant 1,\end{cases} \tag{9}$$

где θ, $0\leqslant\theta<2\pi$,— *вещественный параметр.*

Замечание 2. Оценка (8), представляющая собой обобщение на рассматриваемый случай внешней теоремы площадей Гронуолла для функций класса Σ, получена в работе ([4]) (см. также ([3]), стр. 100).

Сформулированное следствие получается из основной теоремы при $Q(w)=w$.

3. Выбирая надлежащим образом функцию $Q(w)$, можно получить различные оценки в классе $\Sigma(k)$, связанные с геометрическими свойствами гомеоморфизмов рассматриваемых классов. Ограничимся формулировкой лишь нескольких результатов, отметив при этом, что многочисленные другие приложения теоремы могут быть выведены из соображений, аналогичных тем, которые изложены в работах ([8, 9, 12, 13]).

Рассмотрим регулярные в области $|\zeta|>1$, $|z|>1$, функции

$$\ln\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}=\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m(\zeta)z^{-m}=\sum_{n,m=1}^{\infty}\omega_{n,m}\zeta^{-n}z^{-m},$$

где $F(\zeta)\in\Sigma(k)$, и

$$\ln\frac{[F_k(\zeta)-F_k(z)](\zeta+z)}{[F_k(\zeta)+F_k(z)](\zeta-z)}=2\sum_{m=1}^{\infty}\dot{\omega}_{2m-1}(\zeta)z^{-(2m-1)},$$

где $F_*(\zeta)$ принадлежит подклассу нечетных функций из $\Sigma(k)$. Здесь выбраны ветви логарифмов, которые обращаются в нуль при $\zeta=\infty$.

Следствие 2. *Пусть* $F(\zeta)\in\Sigma(k)$ *и* x_p, x_p', $p=1,2,\ldots,$— *постоянные такие, что* $0<\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}|x_p|^2<\infty$, $0<\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}|x_p'|^2<\infty$. *Тогда*

$$\sum_{q=1}^{\infty}q\left|\sum_{p=1}^{\infty}\omega_{p,q}x_p\right|^2\leqslant k^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}|x_p|^2 \tag{10}$$

и

$$\left|\sum_{p,q=1}^{\infty}\omega_{p,q}x_px_q'\right|^2\leqslant k^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}|x_p|^2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}|x_q'|^2. \tag{11}$$

Неравенство (10) представляет собой аналог известного для класса Σ неравенства Н. А. Лебедева (см. ([13]), стр. 218, случай одной области), И. М. Милина ([15]), Поммеренке ([16]) и Дженкинса ([17]). Это неравенство вытекает из теоремы, если положить

$$Q(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\ln\frac{F(z)-w}{z}\sum_{p=1}^{\infty}x_pz^p\frac{dz}{z},\quad \rho>1.$$

Из (10) и неравенства Коши получается неравенство (11). Если в неравенстве (11) положить $x_q'=x_q$ и k устремить к единице, то получим неравенство Грунского ([18]) для функций класса Σ.

Опираясь на неравенство (11) и следуя работе Н. А. Лебедева ([19]), для функций класса $\Sigma(k)$ можно вывести аналоги неравенств Гарабедяна и Шиффера ([20]), Педерсона и Шиффера ([21]), И. Е. Базилевича ([22]). Отметим также, что из неравенств (10) и (11) следует асимптотическая ($k\to0$) оценка $|\alpha_n|\leqslant 2k/(n+1)+O(\varepsilon^2)$ для коэффициентов функции $F(\zeta)$, $\zeta\in B$, класса $\Sigma(k)$ (ср. ([5])).

Следствие 3. *Пусть $F(\zeta)\in\Sigma(k)$. Тогда при каждом $\nu=0, 1, \ldots$ в области B выполняются неравенства*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m|\omega_m^{(\nu)}(\zeta)|^2 \leqslant k^2 \frac{\partial^2\nu \ln[1-(\bar{z}\zeta)^{-1}]^{-1}}{\partial \bar{z}^\nu\, \partial\zeta^\nu}\Big|_{z=\zeta}. \tag{12}$$

Следствие 4. *Пусть $F_*(\zeta)\in\Sigma(k)$ — нечетная функция. Тогда при каждом $\nu=0, 1, \ldots$ в области B выполняются неравенства*

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)|\omega_{2m-1}^{*\nu}(\zeta)|^2 \leqslant k^2 \frac{\partial^{2\nu} \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\zeta\bar{z}+1}{\zeta\bar{z}-1}}{\partial\bar{z}^\nu\,\partial\zeta^\nu}. \tag{13}$$

Заметим, например, что неравенства (12) следуют из (10) при надлежащем выборе постоянных x_p, а также могут быть выведены непосредственно из теоремы при $Q(w)=\left[\ln\dfrac{F(z)-w}{z}\right]_z^{(\nu)}$.

Следствие 5. *В классе $\Sigma(k)$ для производной Шварца в любой точке $\zeta\in B$ справедливы точные оценки*

$$|\{F(\zeta), \zeta\}| \leqslant 6k(|\zeta|^2-1)^{-2}. \tag{14}$$

Следствие 6. *Если $F(\zeta)\in\Sigma(k)$, то в любой точке $\zeta\in B$*

$$|\ln F'(\zeta)| \leqslant k\ln\frac{\rho^2}{\rho^2-1}, \qquad |\zeta|=\rho>1, \tag{15}$$

где под логарифмом понимается ветвь, которая обращается в нуль при $\zeta=\infty$.

Последние две оценки легко следуют из неравенств (12).

Следствие 7. *Пусть $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ — однолистная аналитическая функция в единичном круге с квазиконформным продолжением на плоскость таким, что $|\mu(z)|\leqslant k<1$. Тогда*

$$\left|\ln\frac{zf'(z)}{f(z)}+\ln\frac{f(\infty)}{f(\infty)-f(z)}\right| \leqslant k\ln\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

где выбраны ветви логарифмов, обращающиеся в нуль при $z=0$.

В частности, если $f(\infty)=\infty$, то $\left|\ln\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqslant k\ln\dfrac{1+|z|}{1-|z|}$. Отсюда немедленно получаем

Следствие 8. *В классе квазиконформных гомеоморфизмов плоскости на себя, удовлетворяющих условиям следствия 7 с нормировкой $f(\infty)=\infty$, радиус звездности $r_s(k)$ равен $\operatorname{th}(\pi/2k)$.*

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
19 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Крушкаль, ДАН, 182, № 4, 754 (1968). [2] С. Л. Крушкаль, ДАН, 199, № 2, 269 (1971). [3] R. Kühnau, Math. Nachrichten, 48, № 1—6, 77 (1971). [4] O. Lehte, Ann. Acad. sci. Fenn., Ser. A, 1, 500 (1971). [5] С. Л. Крушкаль, Сиб. матем. журн., 12, № 5, 1067 (1971). [6] L. V. Ahlfors, G. Weill, Proc. Am. Math. Soc., 13, 375 (1962). [7] В. И. Кругликов, Матер. итоговой научной конфер. по математике и механике, 1, Томск, 1970, стр. 30. [8] Н. А. Лебедев, И. М. Милин, Матем. сборн., 28 (70), 2, 359 (1951). [9] И. М. Милин, Однолистные функции и ортонормированные системы, «Наука», 1971. [10] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [11] Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969. [12] Ю. Е. Аленицын, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 94, 3 (1968). [13] Н. А. Лебедев, Там же, 60, 211 (1961). [14] Z. Nehari, Arch. Ration. Mech., Anal, 34, № 4, 301 (1969). [15] И. М. Милин, ДАН, 154, № 2, 264 (1964). [16] Ch. Pommerenke, Math. Zs., 85, 197 (1964). [17] J. A. Jenkis, Illinois J. Math., 8, 80 (1964). [18] H. Grunsky, Math. Zs., 45, 20 (1939). [19] Н. А. Лебедев, Вестн. Ленингр. унив., № 7, 45 (1972). [20] P. R. Garabedian, M. Schiffer, Arch. Ration. Mech., Anal, 26, 1 (1967). [21] R. N. Pederson, M. Schiffer, J. Anal. Math., 23, 353 (1970). [22] И. Е. Базилевич, Матем. сборн., 68 (110), 4, 549 (1965).