Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 517.11 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. А. МАРКОВ

О ПОЛНОТЕ КЛАССИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Как известно, в 1930 г. Гёдель доказал теорему о полноте классического исчисления предикатов (1). В первоначальной редакции и сама эта теорема, и ее доказательство целиком относились к так называемой классической математике с ее теоретико-множественным образом мышления и законом исключенного третьего.

Впоследствии другие авторы упростили доказательство теоремы Гёделя. Особенно простое доказательство получилось в результате работ Хенкина (2) и Хазенъегера (3). Это доказательство также было «классическим».

Конструктивный подход к проблеме полноты классического исчисления предикатов был развит Гильбертом и Бернайсом (4). Они доказали, что любое добавление в качестве новой схемы аксиом невыводимой в классическом исчислении предикатов предикатной формулы к традиционному арифметическому исчислению дает ω-противоречивое исчисление.

В этой статье вкратце излагается другой конструктивный подход к этой проблеме, связанный с привлечением ступенчатой семантической системы, образованной языками $Я_0$, $Я_1$, $Я_2, \ldots, Я_\omega$ (5). Содержание этих статей будет считаться известным.

Определим связки Пн [СП] следующими правилами построения:

СП1. Пустое слово считается СП.

$$\text{СП2.}\quad \frac{S-\text{СП},\ X-\text{Пн},\ X \text{ не входит в } S}{SX-\text{СП}}.$$

Число Пн, входящих в СПS будем называть размерностью S и обозначать $\delta_\llcorner S_\lrcorner$.

Определим терм-векторы [ТВ] следующими правилами построения:

ТВ1. $\square$ считается ТВ;

$$\text{ТВ2.}\quad \frac{V-\text{ТВ},\ T-\text{Тм}}{VT\square-\text{ТВ}}.$$

Число вхождений в ТВV слов вида $\square T\square$, где T — Тм, мы будем называть размерностью V и обозначать $\delta_\llcorner V_\lrcorner$.

Во всем дальнейшем буква α может обозначать 2 [т. е. $||$] или ω.

Определим обозначаемый $\mathfrak{F}_\alpha^*$ алгорифм подстановки ТВ вместо СП в Флα в языке $Я_\alpha$. Его индуктивное определение пусть состоит из следующих пунктов:

$\mathfrak{F}_\alpha^*1.\quad \mathfrak{F}_\alpha^*{}_\llcorner A\square_\lrcorner \rightleftharpoons A;$

$$\mathfrak{F}_\alpha^*2.\quad \mathfrak{F}_{\alpha\llcorner}^* SXAVT\square_\lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} \mathfrak{F}_{\alpha\llcorner} X \mathfrak{F}_{\alpha\llcorner}^* SAV_\lrcorner T_\lrcorner, & \text{если } X \text{ не входит в } V; \\ \mathfrak{F}_{\alpha\llcorner} Y \mathfrak{F}_{\alpha\llcorner}^* S \mathfrak{F}_{\alpha\llcorner} XAY_\lrcorner V_\lrcorner T_\lrcorner, & \text{если } X \text{ входит в } V; \end{cases}$$

здесь A — Флα; S — СП; X — Пн, не входящая в S; V — ТВ такой, что $\delta_\llcorner V_\lrcorner \mathrel{\overset{\circ}{=}} \delta_\llcorner S_\lrcorner$; T — Тм; Y — самая короткая из Пн, не входящих в SV и не являющихся Прα A.

Пункты $\mathfrak{F}_\alpha{}^*1$ и $\mathfrak{F}_\alpha{}^*2$ однозначно определяют $\mathfrak{F}_\alpha{}^*\llcorner SAV \lrcorner$, где S — СП, A — Флα, V — ТВ такой, что $\delta\llcorner V \lrcorner \doteq \delta\llcorner S \lrcorner$. При этом $\mathfrak{F}_\alpha{}^*\llcorner SAV \lrcorner$ оказывается Флα.

Будем говорить о ФлαA, что она есть S-Флα [S-Фα], где S — СП, если каждый Прα A входит в S. Слова вида SA, где S — СП, а A — S-Фα, будем называть предикатами языка $Я_\alpha$ [Пкα].

Всякий Пкα единственным образом представляется в виде SA, где S — СП, а A — S-Фα. Размерность СПS мы будем называть валентностью ПкαSA [A — S-Фα] и обозначать $\beta\llcorner SA \lrcorner$.

Будем называть предикатными символами [ПС] слова вида (PQ), где P — непустое слово в однобуквенном алфавите p, а Q — слово в однобуквенном алфавите q. Длину слова Q будем называть валентностью ПС(PQ) и обозначать $\beta\llcorner (PQ) \lrcorner$.

Фиксируем НА $\mathfrak{C}$ в алфавите $a(\ )\ bd$, применимый ко всякому Вд. Вд, перерабатываемые этим НА в пустое слово, будем называть константами [Кт]. Кт и Пн будем называть частицами [Чц]. Всякая Чц очевидно есть Тм.

Тм T такие, что слово $\square T \square$ входит в ТВ V, будем называть составляющими V. Элементарными векторами [ЭВ] будем называть ТВ, все составляющие которых суть Чц.

Элементарными предикатными формулами [ЭПФ] мы будем называть однобуквенное слово f и слова вида FV, где F — ПС, а V — ЭВ, размерность которого равна $\beta\llcorner F \lrcorner$.

Определим понятие предикатной формулы [ПФ] следующими правилами построения:

$$\text{ПФ1. } \frac{A-\text{ЭПФ}}{A-\text{ПФ}}; \quad \text{ПФ2. } \frac{A, B-\text{ПФ}}{\supset AB-\text{ПФ}}. \quad \text{ПФ3 } \frac{A-\text{ПФ}, X-\text{Пн}}{\forall XA-\text{ПФ}}$$

Определим параметры [Пр] ПФ следующими правилами.

Пр1. Параметрами ЭПФ A считаются Пн, входящие в A;

Пр2. Параметрами ПФ $\supset AB$, где A и B — ПФ, считаются ПрA и ПрB;

Пр3. Параметрами ПФ $\forall XA$, где A — ПФ, а X — Пн, считаются ПрA, отличные от X.

ПФ без Пр будем называть замкнутыми ПФ [ЗПФ].

Определим следующими равенствами результат подстановки — $\mathfrak{F}^B\llcorner TVU \lrcorner$ — ЧцU вместо ЧцT в ЭВV.

$\mathfrak{F}^B1.\quad \mathfrak{F}^B\llcorner T\square U \lrcorner \rightleftharpoons \square$;

$$\mathfrak{F}^B2. \quad \mathfrak{F}\llcorner{}^B TVW\square U \lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} \mathfrak{F}\llcorner{}^B TVU \lrcorner W\square, & \text{если } W \not\equiv T; \\ \mathfrak{F}\llcorner{}^B TVU \lrcorner U\square, & \text{если } W \equiv T; \end{cases}$$

здесь T, U и W — Чц, V — ЭВ.

$\mathfrak{F}^B\llcorner TVU \lrcorner$ есть ЭВ, коль скоро T и U — Чц, а V — ЭВ.

Будем говорить, что КтT правильно входит в ПФA, если в A входит слово $\square T \square$.

Определим, когда мы будем считать допустимой подстановку Чц вместо Чц в ПФ:

Д1. Подстановка Чц вместо Чц в ЭПФ всегда считается допустимой;

Д2. Подстановка ЧцU вместо ЧцT в ПФ $\supset AB$, где A и B — ПФ, тогда и только тогда считается допустимой, когда допустимы подстановки U вместо T в A и U вместо T в B;

Д3. Подстановка ЧцU вместо ЧцT в ПФ $\forall XA$, где A — ПФ, а X — Пн, тогда и только тогда считается допустимой, когда имеет место одно из двух:

а) T не есть ни Пр $\forall XA$, ни правильно входящая в A Кт;

б) T — Пр $\forall XA$ или правильно входящая в A Кт, $U \not\equiv X$ и подстановка U вместо T в A допустима.

Определим следующими равенствами результат подстановки — $\mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner TAU\lrcorner$ — ЧцU вместо ЧцT в ПФA:

$\mathfrak{F}^{\Phi}1$. $\quad \mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner TfU\lrcorner \rightleftharpoons f$;

$\mathfrak{F}^{\Phi}2$. $\quad \mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner TFVU\lrcorner \rightleftharpoons F\mathfrak{F}^{B}\llcorner TVU\lrcorner$;

$\mathfrak{F}^{\Phi}3$. $\quad \mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner T\supset ABU\lrcorner \rightleftharpoons \supset\mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner TAU\lrcorner\mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner TBU\lrcorner$;

$\mathfrak{F}^{\Phi}4$. $\quad \mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner T\forall XAU\lrcorner \rightleftharpoons \begin{cases} \forall XA, & \text{если } T \text{ не есть ни Пр } \forall XA, \text{ ни правильно входящая в } A \text{ Кт;} \\ \forall X\mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner TAU\lrcorner, & \text{если } T \text{ — Пр } \forall XA \text{ или правильно входящая в } A \text{ Кт, } U\not\rightleftharpoons X \text{ и подстановка } U \text{ вместо } T \text{ в } A \text{ допустима;} \end{cases}$

здесь T и U — Чц, F — ПС, V — ЭВ, A и B — ПФ, X — Пн. В пункте $\mathfrak{F}^{\Phi}3$ предполагается, что подстановки U вместо T в A и в B допустимы.

Равенства $\mathfrak{F}^{\Phi}1$ — $\mathfrak{F}^{\Phi}4$ определяют $\mathfrak{F}^{\Phi}\llcorner TAU\lrcorner$, как ПФ в случае, когда T и U — Чц, а A — такая ПФ, что подстановка U вместо T в A допустима.

Определим связки предикатных символов [СПС] следующими правилами построения:

СПС1. Пустое слово считается СПС;

СПС2. $\quad \dfrac{S\text{—СПС, } F\text{—ПС, } F \text{ не входит в } S}{SF\text{—СПС}}.$

Определим предикатные векторы языка $Я_{\alpha}$ [ПВα] следующими правилами построения:

ПВα1. $\quad \square$ считается ПВα;

ПВα2. $\quad \dfrac{V\text{—ПВ, } P\text{—Пк}\alpha}{VP\square\text{—ПВ}}.$

Определим однотипность СПС и ПВα следующим образом:

От1. $\quad \Lambda$ считается однотипным с $\square$;

От 2. $\quad \dfrac{S \text{ однотипна с } V, \beta\llcorner F\lrcorner \eqcirc \beta\llcorner P\lrcorner}{SF \text{ однотипна с } VP\square};$

здесь S — СПС, V — ПВα, F — ПС, P — Пкα. В дальнейшем вместо слов «однотипна с» будет писаться знак $\sim$.

Будем говорить о ПФA, что она есть S-ПФ, где S — СПС, если все ПС, входящие в A, входят в S.

Следующие 4 равенства $\mathfrak{S}_{\alpha}1$ — $\mathfrak{S}_{\alpha}4$ определяют алгорифм предикатной подстановки ПВ вместо СПС в ПФ, обозначаемый $\mathfrak{S}_{\alpha}$.

$\mathfrak{S}_{\alpha}1$. $\quad \mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SfW\lrcorner \rightleftharpoons (\neq)$;

$\mathfrak{S}_{\alpha}2$. $\quad \mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SFTFVWPU\lrcorner \rightleftharpoons \mathfrak{F}_{\alpha}^{*}\llcorner PV\lrcorner$;

$\mathfrak{S}_{\alpha}3$. $\quad \mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner S\supset ABW\lrcorner \rightleftharpoons \supset\mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SAW\lrcorner\mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SBW\lrcorner$;

$\mathfrak{S}_{\alpha}4$. $\quad \mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner S\forall XAW\lrcorner \rightleftharpoons \forall X\mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SAW\lrcorner$;

здесь S и T — СПС; F — ПС такой, что SFT есть СПС; W и U — ПВα; $S\sim W$, $T\sim U$; P — Пкα; V — ЭВ; $\beta\llcorner F\lrcorner \eqcirc \delta\llcorner V\lrcorner \eqcirc \beta\llcorner P\lrcorner$; A и B — ПФ.

Пункты $\mathfrak{S}_{\alpha}1$ — $\mathfrak{S}_{\alpha}4$ однозначно определяют $\mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SAW\lrcorner$, где S — СПС, W — ПВα, $S\sim W$, A — S-ПФ. При этих условиях $\mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SAW\lrcorner$ оказывается Флω и все параметры этой Флω в языке $Я_{\omega}$ являются параметрами A. В частности, $\mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SAW\lrcorner$ есть ЗФω, когда A — замкнутая S-ПФ.

Будем говорить о Флω B, что она есть α-интерпретация ПФA, если имеются СПСS и ПВα W такие, что A есть S-ПФ, $S\sim W$ и

$$B \eqcirc \mathfrak{S}_{\alpha}\llcorner SAW\lrcorner.$$

Всякая α-интерпретация ЗПФ есть ЗФα.

Будем говорить, что ЗПФ α-тождественна, если всякая ее α-интерпретация верна в языке $Я_{\omega}$. Будем говорить, что ЗПФ α-выполнима, если может быть указана ее α-интерпретация, верная в языке $Я_{\omega}$.

Классическое исчисление предикатов [КИП] мы будем здесь тракто вать, следуя (²) с необходимыми отклонениями, вызванными конструктивным подходом. КИП зависит от алгорифма $\mathfrak{C}$, определяющего Кт. Формулированные ниже результаты имеют место для любого $\mathfrak{C}$.

КИП мы будем называть исчисление со следующими аксиомами и следующими правилами вывода:

Аксиомы ПФ видов:

$$\supset A \supset BA, \quad \supset\supset AB \supset\supset A \supset BC \supset AC, \quad \supset\supset\supset AffA,$$

$$\supset {}^{\forall}X \supset AB \supset A\,{}^{\forall}XB, \quad \supset {}^{\forall}XB\mathfrak{J}^{\Phi}\llcorner XBT \lrcorner.$$

Правила вывода:

I (Modus ponens). Вывести B из A и $\supset AB$.

II (Обобщение). Вывести ${}^{\forall}XB$ из B.

В аксиомах и правилах вывода A, B и C — ПФ; X — Пн, не являющаяся ПрA, T — Чц такая, что допустима ее подстановка вместо X в B.

Выводимость ПФ в КИП и выводимость одной ПФ из другой ПФ в КИП определяются обычным образом. ПФA неопровержима в КИП, если ПФf не выводима из A в КИП.

Имеет место следующая конструктивно доказываемая

Теорема. *Всякая* ЗПФ, *неопровержимая в* КИП, 2-*выполнима.*

Отсюда также конструктивно получаем

Следствие. *Всякая 2-тождественная* ЗПФ *выводима в* КИП.

С другой стороны, легко доказывается следующая

Теорема. *Всякая* ЗПФ, *выводимая в* КИП, ω-*тождественна.*

Отсюда получаем

Следствия. *Всякая 2-тождественная* ЗПФ ω-*тождественна.*

ЗПФ *тогда и только тогда выводима в* КИП, *когда она* α-*тождественна* [$\alpha \leftrightharpoons 2$ *или* ω].

Последний результат характеризует место КИП в конструктивной математике.

В доказательствах мы использовали некоторые идеи Хенкина (²) и Хазенъегера (³).

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 VIII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ *K. Gödel,* Monats. Math. u. Phys., B. 37, 349 (1930). ² *L. Henkin,* J. Symb. Logic, v. 14, 3, 159 (1949). ³ *G. Hasenjaeger,* J. Symb. Logic, v. 18, 1, 42 (1953). ⁴ *D. Hilbert, P. Bernays,* Grundlagen d. Mathematik, II, 1939. ⁵ *A. A. Марков,* ДАН, т. 214, №№ 1–6 (1974).