Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 517.518.22 *МАТЕМАТИКА*

Ю. С. НИКОЛЬСКИЙ

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 15 VI 1973)

Пусть $\rho_{k,s}(x)=\sum\limits_k^s |x_i|^{1/\varkappa_i}$, $\varkappa_i>0$, $1\leqslant k\leqslant s\leqslant n$; E^n — n-мерное пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $E^n_{k,s}=E^n$, если $k<s$, и $E^n_{k,s}=\{x\in E^n\colon x_k>0\}$, если $k=s$,

$$\|f\|^p_{L_{p,\alpha}(\Omega)}=\int\limits_\Omega |[\rho_{k,s}(x)]^\alpha f(x)|^p\,dx,\qquad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|f\|_{L_{\infty,\alpha}(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}\operatorname{vrai}|[\rho_{k,s}(x)]^\alpha f(x)|.$$

Для вектора $\mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_n)$ с целыми положительными координатами определим пространство $W^{\mathbf{l}}_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, функций $f(x)$, имеющих обобщенные по С. Л. Соболеву производные $D_i^{l_i}f(x)$, $i=1,\ldots,n$, в $E^n_{k,s}\setminus\{x\in E^n\colon x_j=0, j=k,\ldots,s\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{W^{\mathbf{l}}_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}=\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+\|f\|_{L^{\mathbf{l}}_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}$$

$$\|f\|_{L^{\mathbf{l}}_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}=\sum_{i=1}^n\|D_i^{l_i}f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}.$$

Пусть $\mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_n)$, $l_i>0$, $l_i=\bar{l}_i+\sigma_i$, $\bar{l}_i\geqslant 0$ целое, $0<\sigma_i\leqslant 1$, $i=1,\ldots,n$. Определим пространство $B^{\mathbf{l}}_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, функций $f(x)$, имеющих обобщенные производные $D_i^{\bar{l}_i}f(x)$ в $E^n_{k,s}\setminus\{x\in E^n\colon x_j=0, j=k,\ldots,s\}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B^{\mathbf{l}}_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}=\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+\|f\|_{b^{\mathbf{l}}_{p,\alpha}(E^n_{k,s})},$$

$$\|f\|_{b^{\mathbf{l}}_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}=\sum_{i=1}^n\|f\|_{b^{l_i}_{p,\alpha,i}(E^n_{k,s})}=$$

$$=\sum_{i=1}^n\left\{\int\limits_0^\infty\frac{dt}{t^{1+p\sigma_i}}\int\limits_{E^n_{k,s}}|[\rho_{k,s}(x)+t^{1/\varkappa_i}]^\alpha\Delta_i^2(t)D_i^{\bar{l}_i}f(x)|^p dx\right\}^{1/p}\qquad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|f\|_{b^{\mathbf{l}}_{\infty,\alpha}(E^n_{k,s})}=\sum_{i=1}^n\sup_{x\in E^n_{k,s}}\operatorname*{vrai}_{t>0}|t^{-\sigma_i}[\rho_{k,s}(x)+t^{1/\varkappa_i}]^\alpha\Delta_i^2(t)D_i^{\bar{l}_i}f(x)|,$$

$$\Delta_i^2(t)\varphi(x)=\sum_{j=0}^{2}(-1)^{2-j}C_2^j\varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+jt,x_{i+1},\ldots,x_n).$$

Введем следующие обозначения: $x^{1,m}=(x_1,\ldots,x_m)$, $1\leqslant m\leqslant n$; $x^{1,n}=x$; $\varkappa^{k,s}=(\varkappa_k,\ldots,\varkappa_s)$, $\varkappa_i>0$, $i=k,\ldots,s$, $1\leqslant k\leqslant s\leqslant n$; $\varkappa^{1,n}=\varkappa$, $|\varkappa^{k,s}|=\varkappa_k+\ldots+\varkappa_s$; $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ — вектор с целыми неотрицательными координатами; $D^\nu=D_{x_1}^{\nu_1}\ldots D_{x_n}^{\nu_n}$; $(\nu,\varkappa)=\sum\limits_1^n \nu_i\varkappa_i$; $1/p+1/p'=1$; $E^m=\{x\in E^n$: $x_{m+1}=\ldots=x_n=0\}$, $E^m_{k,s}=E^m$, если $k<s$ или $m<k$, $E^m_{k,s}=\{x\in E^m\colon x_k>0\}$, если $m\geqslant k$ и $k=s$. Для простоты записи вместо неравенства $A\leqslant CB$, где $A=A(f,h)$, $B=B(f,h)$ — некоторые выражения, содержащие функцию f рассматриваемого класса и параметр h, C — положительная постоянная, не зависящая от f и h, будем писать $A\ll B$.

Везде в дальнейшем будем считать $\varkappa_i=1/l_i$, $i=1,\ldots,n$, $\varepsilon_m=1-|\varkappa|/p+|\varkappa^{1,m}|/q-(\nu,\varkappa)-(\alpha-\beta)$, если $m\geqslant k$, и $\varepsilon_m=1-|\varkappa|/p+|\varkappa^{1,m}|/q-(\nu,\varkappa)-\alpha$, если $m<k$, $\delta_m=1-\varepsilon_m$, $1\leqslant k\leqslant s\leqslant n$, $1\leqslant m\leqslant n$, $h>0$; $D^\nu f|_{E^m_{k,s}}$ — след функции $D^\nu f(x)$ на $E^m_{k,s}$, понимаемый при $m<n$ в смысле сходимости L_p^{loc} и совпадающий с $D^\nu f(x)$ при $m=n$, $\|D^\nu\|_{L_{p,\beta}(E^m_{k,s})}$, $\|D^\nu f\|_{b^{r_j}_{p,\beta,j}(E^m_{k,s})}$ ($\beta=0$ при $m<k$) — нормы следа $D^\nu f|_{E^m_{k,s}}$ функции $D^\nu f(x)$ на $E^m_{k,s}$ соответственно в пространствах $L_{p,\beta}(E^m_{k,s})$, $b^{r_j}_{p,\beta,j}(E^m_{k,s})$, $j=1,\ldots,m$. При $m\geqslant k$ в норме $\|D^\nu f\|_{L_{p,\beta}(E^m_{k,s})}$ и соответственно в норме $\|D^\nu f\|_{b^{r_j}_{p,\beta,j}(E^m_{k,s})}$ в качестве весовой функции берется функция $[\rho_{k,\sigma_0}(x^{1,m})]^\beta$ и соответственно функция $[\rho_{k,\sigma_0}(x^{1,m})+t^{1/\varkappa_j}]^\beta$, где $\sigma_0=\min\{s,m\}$.

Теорема 1. *Пусть $f\in W^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $\varepsilon_m>0$. Тогда существует след $D^\nu f|_{E^m_{k,s}}$ $(D^\nu f|_{E^n_{k,s}}=D^\nu f(x))$ такой, что*

$$\|D^\nu f\|_{L_{q,\beta}(E^m_{k,s})}\ll h^{-\delta_m}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+h^{\varepsilon_m}\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})},\tag{1}$$

если $m\geqslant k$, $\alpha\geqslant\beta>-|\varkappa^{k,\sigma_0}|/q$ (при $q=\infty$ $\beta\geqslant0$);

$$\|D^\nu f\|_{L_q(E^m)}\ll h^{-\delta_m}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+h^{\varepsilon_m}\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})},\tag{2}$$

если $m<k$.

Теорема 1, а также все приводимые ниже теоремы содержат при $\alpha=\beta=0$ соответствующие хорошо известные теоремы вложения и продолжения для пространств W_p^1 и B_p^1, рассматриваемых на всем пространстве E^n или на полупространстве.

Теорема 2. *Пусть $f\in W^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$, $\varepsilon_m=0$. Тогда существует след $D^\nu f|_{E^m_{k,s}}$ $(D^\nu f_{E^n_{k,s}}=D^\nu f(x))$ такой, что*

$$\|D^\nu f\|_{L_{q,\beta}(E^m_{k,s})}\ll h^{-1}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})},\tag{3}$$

если $m\geqslant k$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $\alpha-\mu|\varkappa^{k,s}|-\beta<|\varkappa^{k,s}|/p'+|\varkappa^{k,\sigma_0}|/q$, $\beta>-|\varkappa^{k,\sigma_0}|/q$, $\alpha-\mu|\varkappa^{k,s}|>\beta$, а при $1<p<q<\infty$ $\alpha-\mu|\varkappa^{k,s}|\geqslant\beta$ (при $p=1$, $q=\infty$ $\beta\geqslant0$,

$\alpha-\mu|\varkappa^{k,s}|\geqslant\beta)$, $\mu=0,1,\dots$;

$$\|D^\nu f\|_{L_q(E^m)}\ll h^{-1}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}, \tag{4}$$

если $m<k$, $1<p<q<\infty$.

Теорема 3. *Пусть* $f\in W^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$, $1<p<\infty$, $\varepsilon_n=1-(\nu,\ \varkappa)-(\alpha-\beta)=0$, $\alpha-\mu|\varkappa^{k,s}|=\beta>-|\varkappa^{k,s}|/p$, $\mu=0,1,\dots$ *Тогда*

$$\|D^\nu f\|_{L_{p,\beta}(E^n_{k,s})}\ll h^{-1}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}. \tag{5}$$

Теоремы 1, 2 верны и для пространств $B^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$.

При $\rho_{k,s}(x)=x_n^{1/\varkappa_n}$ теорема 2, если $m=n$, и теорема 3 при $\rho_{k,s}(x)=x_n^{1/\varkappa_n}$ в изотропном случае ($l_i=l$, $i=1,\dots,n$), $1<p=q<\infty$ доказана С. В. Успенским [2], а в анизотропном случае $1<p\leqslant q<\infty$, $\alpha\neq\mu-1/p$, $\mu=0,1,\dots$, если $p<q$, доказана А. Ф. Кочарли [3].

Теорема 4. *Пусть* $f\in B^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $\varepsilon_m>0$, $r_j\varkappa_j\leqslant\varepsilon_m$, $j=1,\dots,m$, $r_j=\bar r_j+\beta_j$, $0<\beta_j\leqslant 1$. *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m_{k,s}}$ $(D^\nu f|_{E^n_{k,s}}=D^\nu f(x))$ *такой, что*

$$\|D^\nu f\|_{b^{r_j}_{q,\beta,j}(E^m_{k,s})}\ll h^{-\delta_m-\varkappa_j r_j}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+h^{\varepsilon_m-\varkappa_j r_j}\|f\|_{b^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})},$$

если $m\geqslant k$, $\alpha\leqslant\beta>-|\varkappa^{k,\sigma_0}|/q$ (*при* $q=\infty$ $\beta\geqslant 0$), $\beta<\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\beta_j\varkappa_j$;

$$\|D^\nu f\|_{b^{r_j}_{q,j}(E^m)}\ll h^{-\delta_m-\varkappa_j r_j}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+h^{\varepsilon_m-\varkappa_j r_j}\|f\|_{b^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})},$$

если $m<k$.

Теорема 5. *Пусть* $f\in W^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $\varepsilon_m>0$, $r_j\varkappa_j\leqslant\varepsilon_m$, $j=1,\dots,m$, $r_j=\bar r_j+\beta_j$, $0<\beta_j\leqslant 1$. *Тогда существует след* $D^\nu f|_{E^m_{k,s}}$ $(D^\nu f|_{E^n_{k,s}}=D^\nu f(x))$ *такой, что*

$$\|D^\nu f\|_{b^{r_j}_{q,\beta,j}(E^m_{k,s})}\ll h^{-\delta_m-\varkappa_j r_j}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+h^{\varepsilon_m-\varkappa_j r_j}\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})},$$

если $m\geqslant k$, $\alpha\geqslant\beta>-|\varkappa^{k,\sigma_0}|/q$ (*при* $q=\infty$ $\beta\geqslant 0$), $\beta<\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\beta_j\varkappa_j$, *причем, если* $r_j\varkappa_j=\varepsilon_m$, *то должно выполняться одно из условий*: а) $m<n$ *или* б) $\alpha-\beta<|\varkappa^{k,s}|/p'+|\varkappa^{k,\sigma_0}|/q$, $\alpha-\beta>0$, *а при* $1<p<q\leqslant\infty$ $\alpha-\beta\geqslant 0$ (*при* $p=1$, $q=\infty$ $\beta\geqslant 0$, $\alpha-\beta\geqslant 0$);

$$\|D^\nu f\|_{b^{r_j}_{q,j}(E^m)}\ll h^{-\delta_m-\varkappa_j r_j}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}+h^{\varepsilon_m-\varkappa_j r_j}\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})},$$

если $m<k$.

Теорема 5, как и приводимая ниже теорема 6, при $\rho_{k,s}(x)=x_n^{1/\varkappa_n}$, $m<n$, $l_1=\dots=l_n=l$, $1<p=q<\infty$ была получена С. В. Успенским и П. И. Лизоркиным в работах [4, 5].

В оценках, полученных в теоремах 2—5 (в условиях теорем 4, 5 требуется $r_j\varkappa_j=\varepsilon_m$, $j=1,\ldots,m$), слагаемое $h^{-1}\|f\|_{L_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}$ можно не писать (это сразу следует из предельного перехода при $h\to\infty$ в соответствующих неравенствах).

Доказательство теорем 1—5 базируется на интегральных представлениях функций через их производные и конечные разности, полученных В. П. Ильиным [6] и О. В. Бесовым [7], на неравенстве типа двупараметрического неравенства Харди и Литтльвуда [8] и на неравенстве типа Зигмунда — Кальдерона для некоторого класса сингулярных операторов с обобщенно однородными ядрами, рассматриваемых в пространстве функций, суммируемых в степени p с весом [9].

Теорема 6. *Пусть* $1\leqslant m<n$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $l_\mu>0$ *целые*, $\mu=1,\ldots,n$, $\rho_{k,s}(x)=\sum\limits_k^s|x_i|^{1/\varkappa_i}$, $\{\nu_j^{(i)}\}$, $j=m+1,\ldots,n$, $i=1,\ldots,N$, — *различные множества целых неотрицательных чисел таких, что*

$$\varepsilon_i=1-\sum_{j=m+1}^n\frac{\nu_j^{(i)}}{l_j}-\frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^n\frac{1}{l_j}>0,\quad m\geqslant k,$$

$$\varepsilon_i=1-\sum_{j=m+1}^n\frac{\nu_j^{(i)}}{l_j}-\frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^n\frac{1}{l_j}-\alpha,\quad m<k.$$

Тогда:

1) *если* $m\geqslant k$ *и на* $E^m_{k,s}$ *заданы функции* $\varphi^{(i)}\in b^{r^{(i)}}_{p,\alpha}(E^m_{k,s})$, $i=1,\ldots,N$, $r_j^{(i)}=\varepsilon_i l_j$, $j=1,\ldots,m$, $\alpha>-|\varkappa^{k,\sigma_0}|/p$, $\alpha<\beta_j^{(i)}\varkappa_j$, $j=1,\ldots,m$, $i=1,\ldots,N$, $r_j^{(i)}=\bar r_j^{(i)}+\beta_j^{(i)}$, $0<\beta_j^{(i)}\leqslant1$, *то можно построить в* $E^n_{k,s}$ *функцию* $f\in L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$ *такую, что* $D_{m+1}^{\nu_{m+1}^{(i)}}\ldots D_n^{\nu_n^{(i)}}\Big|_{E^m_{k,s}}=\varphi^{(i)}(x^{1,m})$ *и*

$$\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}\leqslant\sum_{i=1}^N\|\varphi^{(i)}\|_{b^{r^{(i)}}_{p,\alpha}(E^m_{k,s})},\tag{6}$$

2) *если* $m<k$ *и на* E^m *заданы функции* $\varphi^{(i)}\in b_p^{r^{(i)}}(E^m)$, $i=1,\ldots,N$, $r_j^{(i)}=\varepsilon_i l_j$, $j=1,\ldots,m$, *то можно построить в* $E^n_{k,s}$ *функцию* $f\in L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$ *такую, что* $D_{m+1}^{\nu_{m+1}^{(i)}}\ldots D_n^{\nu_n^{(i)}}\Big|_{E^m_{k,s}}=\varphi^{(i)}(x^{1,m})$ *и*

$$\|f\|_{L^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})}\leqslant\sum_{i=1}^N\|\varphi^{(i)}\|_{b^{r^{(i)}}_{p,\alpha}(E^m)}.\tag{7}$$

Теорема 6 остается верной и для пространств $b^1_{p,\alpha}(E^n_{k,s})$.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московск. обл.

Поступило
14 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. В. Успенский*, ДАН, т. 132, № 1, 60 (1960). [2] *С. В. Успенский*, Дифференциальные уравнения, т. 3, № 1, 139 (1967). [3] *А. Ф. Кочарли*, Тр. Инст. матем. и мех. АН АзербССР, Сборн. Функциональный анализ и его применение, 1971, Баку, стр. 112. [4] *С. В. Успенский*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 61, 282 (1961). [5] *П. И. Лизоркин*, ДАН, т. 132, № 3, 514 (1960). [6] *В. П. Ильин*, Сибирск. матем. журн., т. 8, № 3, 573 (1967). [7] *О. В. Бесов*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 89, 5 (1967). [8] *Ю. С. Никольский*, Матер. III Советско-Чехословацкого совещ., май 1971 г. Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики, 1972, стр. 174. [9] *Ю. С. Никольский*, Сибирск матем. журн., т. 12, № 1, 158 (1971).