Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 539.124 | *ФИЗИКА*

В. А. ОШЕРОВИЧ

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ НЕОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком В. А. Фоком 20 IV 1973)

1. Широко известно общее рассуждение Нильса Бора, высказанное в двадцатых годах, о невозможности получить поляризованные электроны в магнитном поле ([1]). Бор полагал магнитный момент электрона равным $e\hbar/(2mc)$. Сейчас мы знаем, что поляризовать электроны неоднородным магнитным полем можно, но только в той мере, в которой $\mu\neq e\hbar/(2mc)$. Это используется в опытах по определению магнитного момента электрона.

Целью настоящей работы является получение прямого математического доказательства отсутствия поляризации электронов с $\mu=e\hbar/(2mc)$ для некоторого класса магнитных полей в рамках уравнения Паули.

2. Рассмотрим магнитные поля, для которых вектор-потенциал **A** можно выбрать так:

$$A_x=A_x(y),\quad A_y=A_z=0. \tag{2,1}$$

Тогда напряженность магнитного поля $\mathscr{H}$ будет направлена вдоль оси z:

$$\mathscr{H}_x=\mathscr{H}_y=0,\quad \mathscr{H}_z=-\partial A_x/\partial y. \tag{2,2}$$

Источниками такого магнитного поля являются объемные токи, направленные вдоль оси x.

Преимущество этого класса магнитных полей перед прочими состоит в том, что двухкомпонентное уравнение Паули расщепляется на два уравнения типа Шредингера с разными для каждой из компонент эффективными потенциалами.

Действительно, уравнение Паули

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi,\quad \psi=\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix},\quad \hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-\frac{\mu}{s}\hat{S}\hat{\mathscr{H}}+U. \tag{2,3}$$

Постоянная $\mu/(s\hbar)$ определяет отношение собственного магнитного момента частицы к механическому $s\hbar$.

Для электрона $\mu/(s\hbar)=e/(mc)$. Полагая $U=0$, с учетом (2,1) получаем

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+i\frac{e\hbar}{cm}A_x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e^2}{2mc^2}A_x^2-\frac{\mu}{s}\hat{S}_z\hat{\mathscr{H}}_z. \tag{2,4}$$

Мы ищем стационарные решения.

Подстановка

$$\psi^n=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et-P_xx-P_zz)\right]\varphi^n(y),\quad n=1,2 \tag{2,5}$$

приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{dy^2}\varphi^1+\frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon-U^1_{\text{эф}})\varphi^1=0,\\ \frac{d^2}{dy^2}\varphi^2+\frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon-U^2_{\text{эф}})\varphi^2=0,\end{gathered} \tag{2,6}$$

где введены обозначения:

$$U^1_{\text{эф}}=\frac{1}{2m}\left(-\hbar\frac{df}{dy}+f^2\right),$$
$$U^2_{\text{эф}}=\frac{1}{2m}\left(\hbar\frac{df}{dy}+f^2\right); \tag{2,7}$$

$$f=P_x-\frac{e}{c}A_x(y), \tag{2,8}$$
$$\varepsilon=E-P_z^2/(2m).$$

Мы считаем, что $\mathscr{H}_z\to 0$ для $y\to\pm\infty$. Пустим плоскую волну вдоль оси y. Пусть D_1 — коэффициент прохождения первой компоненты, D_2 — второй. Если $D_1=D_2$, то при прохождении магнитного слоя поляризации не произойдет. Если же $D_1\neq D_2$, то неполяризованные электроны, пройдя магнитный слой, станут частично поляризованными.

Оказывается, зная φ^1, можно найти φ^2, т. е. по одной компоненте решения уравнения Паули восстанавливается другая для полей класса (2,2).

Гамильтониан (2,3) в отсутствие электрического поля можно для электрона записать как

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\sigma}\left(\hat{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)^2. \tag{2,9}$$

Таким образом, $\hat{\sigma}(\hat{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A})$ является интегралом движения *.

Пусть λ — собственное число этого оператора, т. е.

$$\hat{\sigma}\left(\hat{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix} \tag{2,10}$$

или

$$\left(\hat{P}_x-\frac{e}{c}A_x\right)\psi^2-i\left(\hat{P}_y-\frac{e}{c}A_y\right)\psi^2+\left(\hat{P}_z-\frac{e}{c}A_z\right)\psi^1=\lambda\psi^1,$$
$$\left(\hat{P}_x-\frac{e}{c}A_x\right)\psi^1+i\left(\hat{P}_y-\frac{e}{c}A_y\right)\psi^1-\left(\hat{P}_z-\frac{e}{c}A_z\right)\psi^2=\lambda\psi^2. \tag{2,11}$$

Учитывая (2,1), делаем подстановку

$$\psi^n=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(-P_xx-P_zz)\right]\psi^n(y),\quad n=1,2.$$

Получаем

$$(\lambda-P_z)\psi^1=\left[-\hbar\frac{d}{dy}+\left(P_x-\frac{e}{c}A_x(y)\right)\right]\varphi^2,$$
$$(\lambda+P_z)\psi^2=\left[\hbar\frac{d}{dy}+\left(P_x-\frac{e}{c}A_x(y)\right)\right]\varphi^1, \tag{2,12}$$

или

$$\varphi^1=\frac{1}{\lambda_1}\left(-\hbar\frac{d}{dy}+f\right)\varphi^2,$$
$$\varphi^2=\frac{1}{\lambda_2}\left(\hbar\frac{d}{dy}+f\right)\varphi^1, \tag{2,13}$$

где λ_1 и λ_2 — некоторые числа.

---

* На связь между существованием этого интеграла движения и невозможностью поляризации обратил внимание Ю. Н. Демков.

Действительно, легко проверить, что если φ^1 — решение первого из уравнений (2,6), то $\varphi^2=\frac{1}{\lambda_2}\left(\hbar\frac{d}{dy}+f\right)\varphi^1$ является решением второго. Пусть при $y\to-\infty$

$$\begin{aligned}\varphi^1&=A_1e^{iky}+B_1e^{-iky},\\ \varphi^2&=A_2e^{iky}+B_2e^{-iky}.\end{aligned}\tag{2,14}$$

Из (2,14) следует, что

$$A_2=\frac{1}{\lambda_2}(i\hbar k+f)A_1,\quad B_2=\frac{1}{\lambda_2}(-i\hbar k+f)B_1.\tag{2,15}$$

Следовательно, коэффициенты отражения R_1 и R_2 связаны так:

$$R_2=\left|\frac{B_2}{A_2}\right|=\left|\frac{-i\hbar k+f}{i\hbar k+f}\right|\left|\frac{B_1}{A_1}\right|=\left|\frac{B_1}{A_1}\right|=R_1$$

Таким образом, $D_1=D_2$.

3. Рассмотрим конкретное магнитное поле. Выберем вектор-потенциал так: $A_x=\alpha\,\mathrm{th}\,(y\beta)$, $A_y=A_z=0$, $\alpha,\beta>0$. Тогда

$$\mathscr{H}_x=\mathscr{H}_y=0,\quad \mathscr{H}_z=-\alpha\beta\,\mathrm{sech}^2\,(y\beta).\tag{3,1}$$

Такое магнитное поле допускает точное решение.

Для $P_x=0$ система (2,7) примет вид

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\varphi^1}{dy^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-\frac{P_z^2}{2m}-\frac{e^2\alpha^2}{2mc^2}-(-U_{01}\,\mathrm{sech}^2(y\beta))\right]\varphi^1=0,\\ &\frac{d^2\varphi^2}{dy^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-\frac{P_z^2}{2m}-\frac{e^2\alpha^2}{2mc^2}-(-U_{02}\,\mathrm{sech}^2(y\beta))\right]\varphi^2=0,\end{aligned}\tag{3,2}$$

где

$$U_{01}=-\frac{e\alpha}{2mc}\left(\frac{e\alpha}{c}-\beta\hbar\right),\quad U_{02}=-\frac{e\alpha}{2mc}\left(\frac{e\alpha}{c}+\beta\hbar\right).\tag{3,3}$$

Введем параметр τ:

$$\beta=\frac{e}{c\hbar}\alpha\tau.\tag{3,4}$$

Тогда

$$\begin{aligned}D_1&=\frac{\mathrm{sh}^2(\pi k/\beta)}{\mathrm{sh}^2(\pi k/\beta)+\cos^2\chi_1},\\ D_2&=\frac{\mathrm{sh}^2(\pi k/\beta)}{\mathrm{sh}^2(\pi k/\beta)+\cos^2\chi_2}\end{aligned}\tag{3,5}$$

где

$$\chi_1=\frac{\pi}{2}\frac{\tau-2}{2},$$

$$\chi_2=\frac{\pi}{2}\frac{\tau+2}{2},\quad k=\frac{1}{\hbar}\left[2m\left(E-\frac{P_z^2}{2m}-\frac{e^2\alpha^2}{2mc^2}\right)\right]^{1/2}$$

Из того, что $\chi_1+\chi_2=\pi$, следует $D_1=D_2$.

Учтем первую поправку к магнитному моменту электрона, которую дает квантовая электродинамика. Величины, получаемые с учетом поправки, пометим штрихом. $\mu' = \frac{e\hbar}{2mc}\left(1+\frac{a}{2\pi}\right)$, где a — постоянная тонкой структуры. Получаем

$$U'_{01} = -\frac{e\alpha}{2mc}\left(\frac{e\alpha}{c} - \beta\hbar\left(1+\frac{a}{2\pi}\right)\right),$$
$$U'_{02} = -\frac{e\alpha}{2mc}\left(\frac{e\alpha}{c} + \beta\hbar\left(1+\frac{a}{2\pi}\right)\right). \tag{3,6}$$

Пусть $\tau < 1/(1+a/2\pi)$, что соответствует $U_{01}' < 0$.

Тогда справедливы выражения типа 3,5 для D_1' и D_2', где

$$\chi_1' = \frac{\pi}{2}\frac{\tau-2}{\tau}\left[1-2\frac{\tau}{\pi(\tau-2)^2}\right]^{1/2},$$
$$\chi_2' = \frac{\pi}{2}\frac{\tau+2}{2}\left[1+2\frac{\tau}{\pi(\tau+2)^2}\right]^{1/2}. \tag{3,7}$$

При этом $\chi_1'+\chi_2' \neq \pi$, т. е. $D_1' \neq D_2'$. Таким образом, учтя поправку к магнитному моменту электрона, мы получили наличие поляризации в неоднородном магнитном поле.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Г. Ф. Друкареву за внимательное руководство работой, проф. Ю. Н. Демкову и проф. Л. Д. Фаддееву за обсуждение работы и ряд критических замечаний.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
21 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Мотт, Г. Месси*, Теория атомных столкновений, гл. 9, § 2. М., 1969.