Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 517.948.5 *МАТЕМАТИКА*

Б. И. ПЕЛЕШЕНКО

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 9 VII 1973)

Целью заметки является формулировка одной общей теоремы об ограниченности сингулярных интегралов в широком классе функциональных пространств, включающих, в частности, неизотропные пространства С. Л. Соболева ([1]), С. М. Никольского — О. В. Бесова ([2, 4]) (см. также ([3])), Морри ([5]), «смешанные» пространства $L_{p_1 \ldots p_n}$ и ряд других.

Доказательство основывается на развитии подхода, примененного в ([6]), в сочетании с методами теории локальных приближений из ([7]), в частности, используются структурные теоремы из ([8]), где рассмотрен неизотропный случай.

1. Пусть ρ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$ — функция, обладающая следующими свойствами:

а) $\rho(x)=0 \Leftrightarrow x=0$;

б) $\rho(x+y) \leqslant \gamma\{\rho(x)+\rho(y)\}$, $\quad \gamma \geqslant 1$.

С ее помощью на $\mathbf{R}^n$ задается квазиметрика $r(x, y)=\rho(x-y)$.

Множество $D_{x_0, \lambda}=\{x: \rho(x-x_0)<\lambda\}$ будем называть ρ-шаром с центром x_0 и радиусом λ.

Сделаем относительно ρ еще следующее предположение:

в) множества $D_{0, \lambda}$ выпуклы и симметричны относительно координатных гиперплоскостей.

В качестве такой функции ρ можно взять $\rho_\mu(x)=\max\limits_i |x_i|^{\mu_i}$, $\mu_i>0$ или общее $\rho_\varphi=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi_i(|x_i|)$, где φ_i монотонно возрастает и удовлетворяет Δ_2-условию, $\varphi_i(0)=0$.

2. Определим далее локальное наилучшее приближение функции, принадлежащей «смешанному» пространству L_p, где p здесь и ниже обозначает вектор $(p_1 \ldots p_n)$, $1<p_i<\infty$. Именно для заданного ρ-шара D положим

$$\varepsilon_\alpha(f; D)=\inf_g \frac{\|f-g\|_{L_p(D)}}{\|1\|_{L_p(D)}}, \tag{1}$$

где нижняя грань взята по всем многочленам степени $\leqslant \alpha_i$ по переменной x_i, $1\leqslant i\leqslant n$. Отметим, что нормировка в (1) используется лишь для упрощения формулировок; стоящая в знаменателе функция зависит, очевидно, лишь от объема ρ-шара D.

Наконец, обобщая соответствующее определение из ([7]), введем следующую аппроксимативную характеристику функции.

Определение 1. Аппроксимативным θ-модулем непрерывности порядка α функции $f \in L_p(R^n)$ называется величина

$$\omega_\alpha{}^\theta(f; \tau)=\sup_\pi \left\{\sum_{D\in\pi} \varepsilon_\alpha(f; D)^\theta \operatorname{mes} D\right\}^{1/\theta}, \tag{2}$$

где верхняя грань пробегает все конечные укладки * π, состоящие из конгруэнтных ρ-шаров объема τ.

3. Рассмотрим пространства, определяемые с помощью (2) (в ([7]), где рассмотрен изотропный случай, эти пространства названы квазилипшицевыми).

Определение 2. Пусть X — монотонная функциональная полунорма, заданная на измеримых φ: $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ и принимающая конечные или бесконечные значения. Через $\bar{X}$ обозначим совокупность тех φ, для которых $\|\varphi\|_X<\infty$. Определим с помощью X норму на измеримых f: $R^n\to R$, полагая

$$\|f\|=\|f\|_{L_p}+\|\omega_\alpha{}^\theta(f;\ \cdot)\|_X, \tag{3}$$

и обозначим $\Lambda_p^{\alpha,\theta}(X)$ совокупность тех f, для которых (3) конечна.

Можно показать, что во введенном семействе содержится целый ряд важных в приложениях пространств гладких функций, в частности, 1) изотропные и неизотропные пространства Морри ([9]); 2) изотропные и неизотропные пространства ограниченного в среднем колебания ([10]); 3) изотропные и неизотропные пространства Соболева ([7]); 4) изотропные и неизотропные пространства Никольского — Бесова ([11, 12, 7]); 5) пространства L_p (если $\|\varphi\|_X=0$ для всех φ). Поэтому, доказав теорему об ограниченности сингулярного интеграла в пространстве $\Lambda_p^{\alpha,\theta}(X)$, мы тем самым получаем результаты и для перечисленных пространств.

4. Выделим, следуя М. Котляру ([6]) (см. также ([13])), класс сингулярных интегралов, которые будут изучаться.

Определение 3. Функция K, локально интегрируемая на $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, принадлежит классу $\mathscr{K}(\alpha,\rho)$, если она может быть представлена в виде суммы

$$K=\sum_{m=-\infty}^{\infty}K_m, \tag{4}$$

причем

1) $\sup\limits_m\|K_m\|_{L_1}<+\infty$;

2) носитель K_m лежит в ρ-шаре $D_{0,2^m}$;

3) для любых m и $\beta\leqslant\alpha$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}K_m(x)\,x^\beta\,dx=0.$$

Для формулировки теоремы напомним еще определение модуля непрерывности оси x_i в $L_1(R^n)$:

$$\Omega_k^{(i)}\ (f;\tau)=\sup_{|h|\leqslant\tau}\|\Delta_h{}^kf\|_{L_p},$$

где $h\in\mathbf{R}^n$ коллинеарен оси x_i.

Положим

$$\Omega_\alpha(f;\tau)=\sup_{\rho(y)\leqslant\tau}\sum_{i=1}^n\Omega_{\alpha_i+1}^{(i)}(f;y_i),\qquad y=(y_1\ldots y_n), \tag{5}$$

$$\Psi(\tau)=\|1\|_{Lp(D_{0,\tau})}.$$

Предположим теперь, что все функции K_m из (4) таковы, что при

$$\Omega_\alpha(K_m;\ \tau)\leqslant\Phi(\tau/2^m), \tag{6}$$

* Укладкой мы называем семейство измеримых подмножеств, внутренности которых попарно не пересекаются.

где Φ — монотонно возрастающая функция, $\Phi(0)=0$. С помощью функций Φ и Ψ введем оператор A, определенный на измеримых функциях φ: $R_+\to R_+$, формулой

$$A(\varphi;\tau)=\int_0^\infty h(\tau,u)\varphi(u)\frac{du}{u}, \tag{7}$$

где

$$h(\tau,u)=\begin{cases}0, & u<\tau,\\ \Phi(\tau/u)(\tau/u)^{1/\theta}\Psi(u)/\Psi(\tau), & u\geqslant\tau.\end{cases}$$

Теорема 1. *Сингулярный оператор $Tf=K*f$ ограничен в пространстве $\Lambda_p^{\alpha,\theta}(X)$, если $1<p_i\leqslant\theta\leqslant\infty$, $p_i\neq\infty$, $i=1,\ldots,n$.*

1) $K\in\mathscr{K}(\alpha,\rho)$;

2) *выполняется* (6) *и* $\overline{\lim\limits_{\tau\to 0}}\ln^2\dfrac{1}{\tau}\Phi(\tau)<+\infty$;

3) *оператор A ограничен в пространстве $\overline{X}$.*

Замечания. 1) Теорема 1 может быть сформулирована и в более общем виде, как результат об ограниченности из $\Lambda_p^{\alpha,\theta}(X)$ в $\Lambda_p^{\alpha,\theta}(X)$. При этом оператор A нужно заменить некоторым более сложным оператором, зависящим от $\min\{\alpha,\beta\}$, и требовать его ограниченность из $\overline{X}$ в $\overline{Y}$.

2) Представление ядра K в виде (4) можно получить с помощью подходящего разбиения единицы.

5. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Возьмем такую полунорму X, что $\|\varphi\|_X=0$ для всех φ. Тогда получаем

Следствие 1. *Если $K\in\mathscr{K}(\alpha,\rho)$ и выполняется* (6) *с $\Phi(\tau)=O(\ln^{-2}(1/\tau))$, то оператор $Tf=K*f$ действует непрерывно в пространстве L_p, $1<p_i<\infty$, $1\leqslant i\leqslant n$.*

Этот результат усиливает теорему Котляра — Петре ([6], [12]), у которых $\Phi(\tau)=O(\tau^\lambda)$, $\lambda>0$, $\rho(\tau)$ — эвклидово расстояние, и утверждается ограниченность оператора T в L_p несмешанном, $1<p<\infty$. Отметим еще работу ([14]), в которой ограниченность оператора T в L_p, $1<p<\infty$, получена при других условиях.

2) Возьмем

$$X(\varphi)=\left\{\int_0^\infty\left|\frac{\varphi(\tau)}{\tau^s}\right|^q\frac{d\tau}{\tau}\right\}^{1/q},\quad 1\leqslant q\leqslant\infty;$$

как обычно, при $q=\infty$ заменяем правую часть на $\sup\limits_{\tau>0}|\varphi(\tau)|/\tau^s$. Пусть, далее, $\rho(x)=\rho_\mu(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|^{1/\mu_i}$, $\sum\mu_i=1$, $\mu_i>0$.

Следствие 2. *Пусть $K\in\mathscr{K}(\alpha,\rho_\mu)$ и выполняется* (6) *с $\Phi(\tau)=O(\tau^{\lambda+\varepsilon})$, $\lambda>0$, где $\varepsilon>0$ произвольно мало.*

Тогда оператор $Tf=K*f$ действует непрерывно в анизотропном пространстве Никольского — Бесова $B_{\theta,q}^r$, где

$$r=\{\lambda/\mu_1,\ldots,\lambda/\mu_n\},\quad 1\leqslant q\leqslant\infty,\quad 1\leqslant\theta\leqslant\infty.$$

В изотропном случае результат следствия 2 получен в ([15]) с помощью теории интерполяции оператора в банаховых пространствах. Отметим, что, пользуясь примененным здесь методом, оценку $\Phi(\tau)=O(\tau^{\lambda+\varepsilon})$ в этом следствии можно еще уточнить, используя обобщенное неравенство Харди для оценки нормы оператора (7) в выбранном пространстве $\overline{X}$.

Наконец, в качестве следствий можно получить и результаты об ограниченности оператора T в пространствах Морри и ряд других.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. А. Брудному за руководство работой.

Днепропетровский химико-технологический институт

Поступило
22 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Л. Соболев,* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. [2] *С. М. Никольский,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 37, 244 (1951). [3] *С. М. Никольский,* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [4] *О. В. Бесов,* Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 60, 42 (1961). [5] *G. B. Morrey,* Second Order System of Differential Equations, Contributions to the Theory of Partial Differen. Equations, Ann. Studies, 33, Princeton, 1954. [6] *M. Cotlar,* Condiciones de continuidad de operadores potentiales y de Hilbert. Cursos y seminarios de matemática, F. 2, Buenos Aires, 1959. [7] *Ю. А. Брудный,* Тр. Московск. матем. общ., т. 24, 69 (1971). [8] *Б. И. Пелешенко,* Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст., т. 32 (1973). [9] *S. Campanato,* Ann. Scola Sup. Pisa, S. III, v. 18, Fasc. I, 137 (1964). [10] *F. John, L. Nirenberg,* Comm. Pure and Appl. Math., v. 14, 415 (1961). [11] *G. C. Barozzi,* Ann. Sup. Pisa, Ser. 3, v. 19, f. 4, 609 (1965). [12] *В. П. Ильин,* Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. АН СССР, т. 5, 110 (1967). [13] *J. Peětre,* Rich. Mat., v. 15, 3 (1966). [14] *О. В. Бесов, П. Я. Лизоркин,* Матем. сборн., т. 73 (115), № 1, 65 (1967). [15] *J. Peetre,* Ann. Inst. Fourier, v. 16, 1, 279 (1966).