Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 621.391.23:621.391.28-29:62-506.3

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. В. ПЕТРОВ, А. В. ЗАПОРОЖЕЦ, И. Н. ПОЛЯКОВ

ИНФОРМАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 4 VII 1973)

В настоящей работе рассматриваются вопросы синтеза систем информации и управления обобщенной структуры. В одномерном случае подобные системы могут быть представлены в виде схемы (рис. 1), где $m(t)$ — случайный полезный сигнал, $u(t)$ и $v(t)$ — случайные помехи, $H(p)$ и $W(p)$ — идеальный и действительный операторы преобразования, $\varkappa(t)$ и $k(t)$ — соответствующие импульсные переходные функции, $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ — идеальный и действительный выходы системы, $\varphi(t)=m(t)+u(t)$. Сигналы $m(t)$, $u(t)$, $v(t)$ предполагаются стационарными, гауссовскими, с известными корреляционными функциями и равными нулю средними значениями. К указанной структуре сводятся разомкнутые и замкнутые системы с одной или несколькими точками приложения воздействия ([1]).

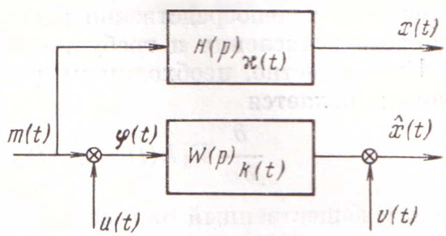

Рис. 1

В теории информации ([2], [3]) дается критерий, определяющий количественно информативность $\hat{x}(t)$ относительно $x(t)$, который для произвольного момента времени $t=t_*$ записывается в виде

$$J[x(t_*)/\hat{x}(t_*)]=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,\hat{x})\log\frac{p(x/\hat{x})}{p(x)}\,dx\,d\hat{x}=-{}^1/_2\log(1-r^2), \qquad (1)$$

где r — коэффициент корреляции между величинами $x(t_*)$ и $\hat{x}(t_*)$. Коэффициент корреляции определяется ([3]) как

$$r=b_{x\hat{x}}/(b_{xx}b_{\hat{x}\hat{x}})^{1/2}, \qquad (2)$$

где $b_{x\hat{x}}$ — смешанный центральный момент 2-го порядка, определяемый согласно эргодической теореме ([4]) соотношением

$$b_{x\hat{x}}=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x\hat{x}p(x,\hat{x})\,dx\,d\hat{x}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}x(t)\,\hat{x}(t)\,dt. \qquad (3)$$

Последнее позволяет вывести оценки количества информации для произвольных структур, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Выражения для оценок получаются как во временной, так и в частной областях, для систем, удовлетворяющих или не удовлетворяющих условиям физической возможности ([3]), с конечным или бесконечным временем переходного процесса.

В настоящей работе решается задача синтеза оптимальных характеристик динамических систем на базе информационного критерия. Условием оптимальности является

$$J[x(t_*)/\hat{x}(t_*)]=\max \quad \text{или} \quad r^2=\max. \tag{4}$$

Учитывая соотношения (2), (3), а также

$$x(t)=\int m(t-\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau, \quad \hat{x}(t)=\int \varphi(t-\tau)k(\tau)\,d\tau+v(t), \tag{5}$$

оптимизируемый функционал представляем в виде

$$V[k(t)]=A^2/(BC), \tag{6}$$

$$A=\iint R_{m\varphi}(t-\tau)k(t)\varkappa(\tau)\,dt\,d\tau+\int R_{vm}(t)\varkappa(t)\,dt,$$

$$B=\iint R_m(t-\tau)\varkappa(t)\varkappa(\tau)\,dt\,d\tau,$$

$$C=\iint R_\varphi(t-\tau)k(t)k(\tau)\,dt\,d\tau+2\int R_{v\varphi}(t)k(t)\,dt+R_v(0),$$

где R – обозначение корреляционной функции.

В соответствии с постановленной задачей необходимо найти импульсную переходную функцию действительной системы $k(t)$, доставляющей максимум выражению (6). Однако нелокальность [5] функционала (6) не позволяет непосредственно использовать аппарат классического вариационного исчисления и требует специального решения.

Как известно, необходимым условием экстремума какого-либо функционала является

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}V[k(t)+\alpha\eta(t)]_{\alpha=0}=\frac{\partial V(\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}=0, \tag{7}$$

где α – вещественный параметр, не зависящий от t, $\eta(t)$ – вариация $k(t)$; функционал $V(\alpha)$ с точностью до множителя B, не зависящего от $k(t)$, определяется соотношением

$$V(\alpha)=[A+\alpha D]^2/[\alpha^2E+2\alpha F+C], \tag{8}$$

$$D=\iint R_{m\varphi}(t-\tau)\eta(t)\varkappa(\tau)\,dt\,d\tau, \quad E=\iint R_\varphi(t-\tau)\eta(t)\eta(\tau)\,dt\,d\tau,$$

$$F=\iint R_\varphi(t-\tau)\eta(t)k(\tau)\,dt\,d\tau+\int R_{v\varphi}(t)\eta(t)\,dt.$$

Условие (7) для функционала (8) запишется в виде

$$2ADC-2FA^2=0. \tag{9}$$

Из уравнения (9) следуют два условия: $A=0$, что соответствует наименьшему значению [2] критерия (1), и

$$DC-FA=0. \tag{10}$$

Необходимо отметить некоторые особенности функционала (8): при выполнении условия (10) функция $\partial V/\partial\alpha$ равна нулю при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=-A/D$, сохраняет свой знак при $\alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)$; функция $V(\alpha)$ имеет при $\alpha\to\pm\infty$ асимптоту D^2/E, которую пересекает в точке $\alpha_3=\alpha_2/2$; кроме того $V(\alpha_2)=0$.

Для того чтобы при выполнении условия (10) имел место максимум, достаточно, чтобы при этом $\partial^2V/\partial\alpha^2|_{\alpha=0}<0$ или в малой окрестности точки $\alpha=0$ имело место $\partial V/\partial\alpha<0$ при $\alpha>0$ и $\partial V/\partial\alpha>0$ при $\alpha<0$. В силу теоремы Лагранжа

$$\frac{V(\alpha_2)-V(\alpha_1)}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{\partial V}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=\xi}=V'(\xi), \tag{11}$$

где $\xi=\alpha_1+\theta(\alpha_2-\alpha_1)$, $0<\theta<1$. Преобразуя (11), будем иметь

$$V(\alpha_1)-V(\alpha_2)=(\alpha_1-\alpha_2)\cdot V'(\xi)>0. \tag{12}$$

Неравенство (12) выполняется всегда в силу свойств $V(\alpha)$.

Таким образом, видно, что выполнение условия (10) является необходимым и достаточным условием максимума функционала (6). Из аналогичных рассуждений следует, что необходимым и достаточным условием минимума функционала (6) является тривиальное условие $A=0$.

Раскрывая (10), будем иметь

$$\int N(t)\eta(t)\,dt=0, \tag{13}$$

$$N(t)=C\left[\int R_{m\varphi}(t-\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau\right]-A\left[\int R_{\varphi}(t-\tau)k(\tau)\,d\tau+R_{v\varphi}(t)\right] \tag{14}$$

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления из (13) и (14) следует система уравнений

$$\begin{aligned}&\int R_{\varphi}(t-\tau)k(\tau)\,d\tau+R_{v\varphi}(t)=\lambda\int R_{m\varphi}(t-\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau,\\&\lambda=C/A.\end{aligned} \tag{15}$$

При $\lambda=1$ из (15) следует уравнение Винера — Хопфа.

Решение (15) для систем, не удовлетворяющих условию физической возможности, записывается в виде

$$W(j\omega)=\frac{\lambda S_{m\varphi}(j\omega)H(j\omega)-S_{v\varphi}(j\omega)}{S_{\varphi}(\omega)}, \tag{16}$$

$$\lambda=U_1/T_1,$$

$$U_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_v(\omega)\cdot S_{\varphi}(\omega)-|S_{v\varphi}(j\omega)|^2}{S_{\varphi}(\omega)}\,d\omega,$$

$$T_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(-j\omega)\left[S_{\varphi}(\omega)\cdot S_{vm}(j\omega)-S_{v\varphi}(j\omega)\cdot S_{m\varphi}(-j\omega)\right]}{S_{\varphi}(\omega)}\,d\omega,$$

где S — соответствующие спектральные плотности. Для систем, удовлетворяющих условию $k(t)=0$ при $t\leqslant 0$, решения (15) получаются в виде соотношений

$$W(j\omega)=\frac{1}{\Psi(j\omega)}\left[\frac{\lambda S_{m\varphi}(j\omega)H(j\omega)-S_{v\varphi}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)}\right]_+, \tag{17}$$

$$\lambda=U_2/T_2,$$

$$U_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{S_{v\varphi}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)}\right]_+\cdot\left[\frac{S_{v\varphi}(-j\omega)}{\Psi(j\omega)}\right]_- -S_v(\omega)\right\}d\omega,$$

$$T_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{S_{m\varphi}(-j\omega)H(-j\omega)}{\Psi(j\omega)}\right]_-\cdot\left[\frac{S_{v\varphi}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)}\right]_+ -S_{vm}(j\omega)H(-j\omega)\right\}d\omega,$$

$$S_{\varphi}(\omega)=\Psi(j\omega)\cdot\Psi(-j\omega).$$

Несложно также записать систему (15) и получить ее решения для систем с конечным временем переходного процесса, для систем с переменными параметрами, для дискретных систем, для многомерных систем.

Из изложенного следует вывод о том, что система, оптимальная по информационному критерию, оптимальна в среднеквадратическом смысле. Это соответствие характерно для широкого класса отмеченных выше систем, а не только для физически нереализуемых, что доказывалось в ([6]).

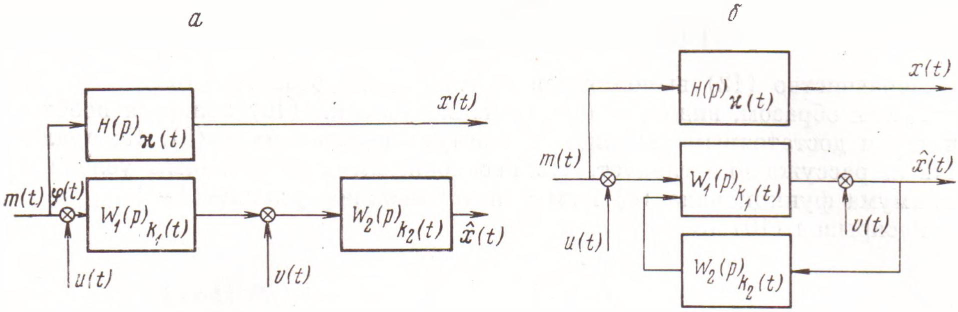

Рис. 2

Однако эта эквивалентность имеет место лишь в частном случае (при $\lambda=1$). Таким образом, в общем случае оптимальность по информации достигается на характеристиках, не оптимальных по среднеквадратическому критерию. Это означает, что возможности получения наилучших приближений $x(t)$ использованы не до конца, и в рамках тех же исходных данных существует иная структура (например, рис. 2 *а*, *б*), которая приводит к ошибкам, меньшим, чем те, которые имеют место при реализации винеровского фильтра для исследованной обобщенной структуры, представленной на рис. 1. В частности, для структуры, приведенной на рис. 2 *а*, при условии, что $W_2(p)$ ищется в классе операторов нулевого порядка (т. е. $W_2(p)=K$, где K — коэффициент усиления), оптимальность по информации и оптимальность в среднеквадратическом смысле совпадают, причем $W_1(p)$ определяется из решения системы, полностью совпадающей с системой (15), а $W_2(p)=K=1/\lambda$. Ясно, что при $\lambda=1$ оптимальная система со структурой, представленной на рис. 2 *а*, переходит в оптимальную систему, структура которой дана на рис. 1.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
21 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. В. Солодовников*, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, 1960. [2] *К. Шеннон*, Работы по теории информации и кибернетике, 1963. [3] *В. С. Пугачев*, Теория случайных функций, 1962. [4] *А. Я. Хинчин*, Асимптотические законы теории вероятностей, М.–Л., 1936. [5] *И. М. Гельфанд*, *С. В. Фомин*, Вариационное исчисление, М., 1961. [6] *Б. Н. Петров*, *В. В. Петров* и др., Тр. IV Всесоюзн. совещания по автоматическому управлению, т. 1, М., 1969.