Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 539.311+539.313 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Л. М. НЕЧАЕВ, Г. С. ТАРАСЬЕВ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ КРУГОВОГО В ПРОМЕЖУТОЧНОМ СОСТОЯНИИ ТОННЕЛЯ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ТЕЛЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 3 I 1974)

В работе (1) были сформулированы граничные задачи наложения тензоров конечных упругих деформаций в координатах начального, промежуточного и конечного состояний. Ниже дается постановка и решение в двух приближениях задачи о концентрации напряжений около кругового в промежуточном состоянии тоннеля.

1. При рассмотрении геометрии деформирования выделяются три состояния идеально упругого изотропного тела: естественное, промежуточное и конечное. Естественное состояние характеризуется отсутствием деформаций и напряжений в теле. При воздействии на тело внешних статических нагрузок, оно приобретает конечные начальные деформации и переходит в промежуточное состояние. В теле, находящемся в этом состоянии, намечается граничная поверхность. Затем область, ограниченная названной поверхностью, удаляется, а ее действие на оставшуюся часть тела заменяется, по аксиоме освобождаемости от связей, внутренними напряжениями, действующими на этой поверхности. При этом внутренние напряжения переходят в разряд внешних сил. Далее предполагается, что эти силы уменьшаются квазистатически до нуля и вызывают появление в теле конечных дополнительных деформаций и напряжений. Это соответствует переходу тела в конечное состояние.

Перемещение частиц тела из естественного состояния в промежуточное характеризуется вектором смещения u, а из промежуточного в конечное — вектором смещения w. Тензоры E, $\mathscr{E}$ начальных и дополнительных деформаций выражаются через градиенты векторов перемещений в координатном базисе $э^i$ промежуточного состояния по формулам

$$E=\tfrac{1}{2}(\nabla u+u\nabla-\nabla u\cdot u\nabla),\qquad \mathscr{E}=\tfrac{1}{2}(\nabla w+w\nabla+\nabla w\cdot w\nabla). \tag{1}$$

Тензор полных деформаций (2) равен $Э=E+\mathscr{E}$.

Напряженное состояние индивидуальной частицы в базисе $э_i$ промежуточного состояния характеризуется обобщенными тензорами Σ, S, Π начальных, дополнительных и полных напряжений, определяемых через тензоры σ, T истинных начальных и полных напряжений по формулам

$$\Sigma=(1+\Delta_1)\sigma,\quad \Pi=(1+\Delta)\Psi^{*-1}\cdot T\cdot\Psi^{-1},\quad 1+\Delta=(1+\Delta_1)(1+\Delta_2),$$
$$S=\Pi-\Sigma; \tag{2}$$

в (2) Δ_1, Δ_2, Δ — относительные изменения объема одной и той же частицы при ее переходе из начального в промежуточное, из промежуточного в конечное и из начального в конечное состояние, а $\Psi^{-1}=(\mathrm{I}+\nabla w)^{-1}$.

Если ρ — массовая плотность в промежуточном состоянии, а F, F_1 — полная и начальная массовые силы, отнесенные к базису промежуточного состояния, то уравнение равновесия можно записать в виде

$$\nabla\cdot[S(1+\Delta_1)^{-1}]+[S(1+\Delta_1)^{-1}+\sigma]:(\nabla\Psi\cdot\Psi^{-1})+\rho(F-F_1)=0. \tag{3}$$

Статические граничные условия имеют вид

$$n\cdot S=-n\Sigma+(1+\Delta_1)P_n\cdot\Psi^{-1}, \tag{4}$$

где P_n — вектор внешних поверхностных сил рассчитанных на единицу площади промежуточного состояния, n — нормаль к границе тела, находящегося в промежуточном состоянии.

Для упругого тела приращение потенциала при наличии начальных и полных деформаций записывается в виде

$$dA_1=\Sigma\cdot(\mathrm{I}-2E)^{-1}:dE,\quad dA_2=\Pi:dЭ, \tag{5}$$

причем первое представление справедливо только для изотропных материалов, в то время как второе и для анизотропных. Заметим, что для изотропных материалов структура потенциалов A_1, A_2 одинаковая, и от одного из них к другому можно перейти заменой инвариантов E_n тензора E на инварианты $Э_n$ тензора $Э$ или наоборот. В дальнейшем ограничимся изотропными материалами.

Из (5) следует, что

$$\Sigma=\frac{\partial A_1}{\partial E_1}(\mathrm{I}-2E)+2\frac{\partial A_1}{\partial E_2}(E-2E^2)+3\frac{\partial A_1}{\partial E_3}(E^2-2E^3), \tag{6}$$

$$\Pi=\frac{\partial A_2}{\partial Э_1}I+2\frac{\partial A_2}{\partial Э_2}Э+3\frac{\partial A_2}{\partial Э_3}Э^2. \tag{7}$$

В соответствии с (2) тензор дополнительных напряжений определится как разность (7) и (6).

Тензор σ начальных истинных в общем случае неоднородных напряжений определяется при задании зависимости (6) из уравнения равновесия и граничного условия

$$\nabla\cdot\sigma+\rho F_1=0,\quad n\cdot\sigma=P_n',$$

где P_n' — вектор истинных внешних напряжений, действующих на границе тела, находящегося в промежуточном состоянии.

Приведенными выше формулами исчерпывается постановка граничных задач наложения конечных деформаций в метрике промежуточного состояния.

2. Рассмотрим задачу о концентрации напряжений около круговой в промежуточном состоянии полости.

Пусть бесконечно протяженное тело подверглось плоским статическим однородным деформациям и находится в промежуточном состоянии. При этом частицы тела получили смещения

$$u=u_k i_k=\delta_{jk}(1-\lambda_j^{-1})x_j i_k,\quad u_3=0,\quad j,\ k=1,\ 2;$$

здесь λ_j — степени растяжения частиц тела, а по j и k производится суммирование.

В теле с конечными начальными деформациями намечается круговая радиуса R цилиндрическая поверхность, ось симметрии которой совпадает с осью x_3. Затем область, ограниченная этой поверхностью, удаляется и тело переходит в конечное состояние. При этом считается, что интенсивность истинных напряжений на бесконечности не меняется.

Для изотропного упругого тела потенциалы напряжений A_1 и A_2 возьмем в виде

$$A_1={}^1/_2\lambda E_1^2+GE_2,\quad A_2={}^1/_2\lambda Э_1^2+GЭ_2.$$

По формулам (6), (7) и (2) вычисляем тензоры начальных, полных и дополнительных обобщенных напряжений

$$\Sigma=\lambda E_1\mathrm{I}+2GE-2\lambda E_1E-4GE^2,\quad \Pi=\lambda Э_1\mathrm{I}+2GЭ, \tag{8}$$

$$S=\lambda\mathscr{E}_1\mathrm{I}+2G\mathscr{E}+2\lambda E_1E+4GE^2. \tag{9}$$

Переходя в формуле (9) к градиентам вектора смещения w, получим

$$S=\lambda(\nabla\cdot w+{}^1/_2\nabla w:w\nabla)\mathrm{I}+G(\nabla w+w\nabla+\nabla w\cdot w\nabla)+2\lambda E_1E+4GE^2. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (3) и опуская массовые силы, получаем уравнение Ламе

$$(\lambda+G)\nabla(\nabla\cdot w)+G\nabla\cdot\nabla w=f, \quad (11)$$

где $f=-\nabla\cdot[{}^1/_2\lambda(\nabla w:w\nabla)+G(\nabla w\cdot w\nabla)]-[\lambda(\nabla\cdot w+{}^1/_2\nabla w:w\nabla)\mathrm{I}+$
$+G(\nabla w+w\nabla+\nabla w\cdot w\nabla)+\lambda E_1\mathrm{I}+2GE]:\nabla\nabla w\cdot(\mathrm{I}+\nabla w)^{-1}$.

Так как контур полости в конечном состоянии свободен от нагрузки, то граничные условия (4) имеют вид

$$n\cdot S=-n\cdot\Sigma. \quad (12)$$

Для решения уравнения (11) воспользуемся методом последовательных приближений, для чего все характеристики дополнительного напряженно деформированного состояния представим рядами

$$w=w^{(0)}+w^{(1)}+\ldots,\quad S=S^{(0)}+S^{(1)}+\ldots$$

Тогда закон состояния (10), уравнение равновесия (11) и граничные условия (12) для двух приближений запишутся в виде

$$S^{(0)}=\lambda\nabla\cdot w^{(0)}\mathrm{I}+G(\nabla w^{(0)}+w^{(0)}\nabla)+2\lambda E_1E+4GE^2,$$

$$S^{(1)}=\lambda(\nabla\cdot w^{(1)}+{}^1/_2\nabla w^{(0)}:w^{(0)}\nabla)\mathrm{I}+G(\nabla w^{(1)}+w^{(1)}\nabla+\nabla w^{(0)}\cdot w^{(0)}\nabla),$$

$$(\lambda+G)\nabla(\nabla\cdot w^{(i)})+G\nabla\cdot\nabla w^{(i)}=f^{(i)},\quad i=0,1;$$

$$f^{(0)}=0,\quad f^{(1)}=-\nabla\cdot[{}^1/_2\lambda(\nabla w^{(0)}:w^{(0)}\nabla)\mathrm{I}+G(\nabla w^{(0)}\cdot w^{(0)}\nabla)]-$$
$$-[\lambda\nabla\cdot w^{(0)}\mathrm{I}+G(\nabla w^{(0)}+w^{(0)}\nabla)+\lambda E_1\mathrm{I}+2GE]:\nabla\nabla w^{(0)},$$

$$n\cdot S^{(0)}=-n\cdot\Sigma,\quad n\cdot S^{(1)}=0.$$

Вводя комплексные координаты $z=x_1+ix_2$, $\bar z=x_1-ix_2$ и используя метод Мусхелишвили ([3]), определяем смещения точек тела. Не приводя здесь громоздкое выражение поля смещений, запишем лишь уравнение контура полости в конечном состоянии:

$$x_1=R[\cos\theta+(n_1\cos\theta)G^{-1}+(n_2\cos\theta+n_3\cos3\theta+n_4\cos5\theta)G^{-2}],$$

$$x_2=R[\sin\theta+(m_1\sin\theta)G^{-1}+(m_2\sin\theta+m_3\sin3\theta+m_4\sin5\theta)G^{-2}],$$

$$n_1=2(1-\nu)(a_0-b_0)-Ge_1,\quad n_2={}^1/_2(-4\nu^2+8\nu-5)a_0^2+{}^1/_8(8\nu-5)b_0^2+$$
$$+{}^1/_2(24\nu^2-36\nu+15)a_0b_0+2G(1-\nu)(a_0-b_0)e_1-{}^1/_2G^2e_1^2,$$

$$n_3={}^1/_6(4\nu-3)a_0b_0+{}^1/_{24}(32\nu^2-44\nu+17)b_0^2,\quad n_4={}^1/_{40}(4\nu-3)b_0^2,$$

$$m_1=2(1-\nu)(a_0+b_0)-Ge_2,\quad m_2={}^1/_2(-4\nu^2+8\nu-5)a_0^2+{}^1/_8(8\nu-5)b_0^2-$$
$$-{}^1/_2(24\nu^2-36\nu+15)a_0b_0+2G(1-\nu)(a_0+b_0)e_2-{}^1/_2G^2e_2^2,$$

$$m_3={}^1/_6(4\nu-3)a_0b_0-{}^1/_{24}(32\nu^2-44\nu+17)b_0^2,\quad m_4=n_4,$$

$$a_0={}^1/_4(1+\Delta_1)(\sigma_1+\sigma_2),\quad b_0={}^1/_2(1+\Delta_1)(\sigma_2-\sigma_1),\quad e_j={}^1/_2(1-\lambda_j^{-2}),$$

где G — модуль упругости, $\nu={}^1/_2\lambda/(\lambda+G)$.

Далее по формуле (10) вычисляем дополнительные напряжения. На краю полости они имеют вид

$$s_\theta=4b_0\cos2\theta+k_0(k_1+k_2\cos2\theta+k_3\cos4\theta)G^{-1},$$

$$k_0=1/(1-\nu),\quad k_1={}^1/_4(16\nu^2-24\nu+11)b_0^2-a_0^2,$$

$$k_2=2(-8\nu^2+12\nu-5)a_0b_0,\quad k_3=(-8\nu^2+12\nu-5)b_0^2.$$

Используя формулы (2), находим полные истинные напряжения. На краю полости они вычисляются по формуле

$$t_\theta=(1+\Delta_1)^{-1}[4(a_0+b_0\cos 2\theta)+c_0(c_1+c_2\cos 2\theta+c_3\cos 4\theta)G^{-1}],$$

$$c_0=1/(1-\nu),\quad c_1=(7-8\nu)a_0^2+{}^1/_4(16\nu^2-40\nu+27)b_0^2-2G(1-\nu)(e_2-e_1)b_0,$$

$$c_2=2(-8\nu^2+4\nu+3)a_0b_0-4G(1-\nu)(e_2-e_1)a_0,\quad c_3=(-8\nu^2+8\nu-1)b_0^2-$$

$$-2G(1-\nu)(e_2-e_1)b_0,\quad 1+\Delta_1=\lambda_1\lambda_2.$$

Вычисляя начальные деформации из выражения (8) с принятой здесь точностью и переходя к истинным начальным напряжениям, находим максимальный коэффициент концентрации напряжений при $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-p$:

$$\varkappa=-3\left[1-\frac{3+4\nu-8\nu^2}{8(1-\nu)}\frac{p}{G}\right].$$

В частности, для $\nu=0{,}3$; $p/G=0{,}3$ коэффициент концентрации $\varkappa=-2{,}44$.

Тульский политехнический
институт

Поступило
11 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. С. Тарасьев,* В сборн. Технология машиностроения, в. 20, Тула, 1971. [2] *Л. И. Седов,* Введение в механику сплошной среды, М., 1962. [3] *Н. И. Мусхелишвили,* Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1966.