Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 517.91:513.88 *МАТЕМАТИКА*

М. И. ХАЗАН

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

*(Представлено академиком С. М. Никольским 22 II 1973)*

В этой работе изучается задача Коши (з.К.)

$$du(t)/dt=A(t)u(t), \quad s\leqslant t\leqslant T, \quad u(s)=x, \tag{1}$$

где $A(t)$ — семейство нелинейных неограниченных операторов в локально-выпуклом пространстве (л.в.п.) $X$. В случае банахова ($B$-) пространства подобные задачи активно изучались в последние годы (см., например, [2–7]). При этом операторы $A(t)$ предполагались (с точностью до слагаемого $\lambda I$) либо диссипативными, либо [5] локально-диссипативными, а также имеющими не зависящую от $t$ область определения (в [6] разрешимость з.К. (1) доказана лишь для $x\in\bigcap_t D(A(t))$, а в [7] не зависит от $t$ обобщенная область определения, которая в основных случаях совпадает с обычной). Мы приводим теоремы существования и единственности, свободные от этих ограничений, так что результаты новые уже для $B$-пространств. Кроме того, мы определяем полускалярные произведения в л.в.п., что позволяет обобщить результаты работ [2–7] на произвольные л.в.п. Нелинейные эволюционные уравнения в общих л.в.п. рассматриваются, по-видимому, впервые (нам известна лишь работа [8], где изучается уравнение с постоянным оператором в монтелевском пространстве Фреше).

В дальнейшем $R=(-\infty,\infty)$, $N=\{0,1,2,\ldots\}$, $X$ — отделимое л.в.п. над $R$, $P$ — определяющее его топологию семейство преднорм, $D(A)$ и $R(A)$ — область определения и множество значений оператора $A$ соответственно, $I$ — тождественный оператор в $X$. Сильная сходимость в $X$ обозначается символами $s$-lim и $\to$, а слабая — символами $w$-lim и $\rightharpoonup$. Функцию $u$: $[s,T]\to X$ назовем Липшиц-непрерывной, если $\forall p\in P$ $\exists\lambda_p\geqslant 0$ $p(u(t)-u(\tau))\leqslant\lambda_p|t-\tau|$.

Определение 1. Функцию $u$: $[s,T]\to X$ такую, что $u(s)=x$, назовем $wC^1$-решением з.К. (1), если $\forall t\in[s,T]$ $u(t)\in D(A(t))$, $\forall f\in X'$ функция $t\to(u(t),f)$ непрерывно дифференцируема на $[s,T]$ и $d/dt(u(t),f)=(A(t)u(t),f)$.

Можно показать, что функция $u$, являющаяся $wC^1$-решением з.К. (1), Липшиц-непрерывна, а если $X$ — пространство Фреше, то почти всюду на $[s,T]$ существует сильная производная $du(t)/dt=A(t)u(t)$. В частности, в $B$-пространстве $wC^1$-решение является сильным решением в смысле [7].

Определение 2. Семейство операторов $\{A(t): t\in[0,T]\}$ назовем коллективно $ww$- (соответственно $sw$-) замкнутым, если из того, что $[0,T]\ni t_n\to t$, $D(A(t_n))\ni x_n\rightharpoonup x$ (соответственно $x_n\to x$), $A(t_n)x_n\rightharpoonup y$, следует, что $x\in D(A(t))$ и $A(t)x=y$, и коллективно $sb$-замкнутым, если из того, что $[0,T]\ni t_n\to t$, $D(A(t_n))\ni x_n\to x$ и последовательность $\{A(t_n)x_n: n\in N\}$ ограничена, следует, что $x\in D(A(t))$ и $A(t_n)x_n\rightharpoonup A(t)x$.

Полагая в этих определениях $t_n=t$, получим определение $ww$-, $sw$- и $sb$-замкнутости оператора $A(t)$. Очевидно, деминепрерывный оператор

$A$ $sb$-замкнут, если $\overline{D(A)}=D(A)$. Кроме того, в л.в.п. класса $\mathfrak{R}$ (см. ниже) коллективная $sb$-замкнутость равносильна коллективной $sw$-замкнутости.

Определение 3. Отделимое л.в.п. $X$ принадлежит классу $\mathfrak{R}$, если каждая ограниченная последовательность в $X$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

Класс $\mathfrak{R}$ содержит всякое полурефлексивное л.в.п., в котором существует метризуемая л.в. топология, мажорируемая исходной, в частности всякое рефлексивное пространство Фреше. Строгий индуктивный предел полных л.в.п. класса $\mathfrak{R}$ есть л.в.п. класса $\mathfrak{R}$.

Пусть $\{A(t): t\in[0, T]\}$ — семейство операторов в $X$. Зафиксируем для любых $t\in[0, T]$ и $\alpha\in R$ однозначный оператор $J_\alpha(t)$ с областью определения $D(J_\alpha(t))=R(I-\alpha A(t))$ такой, что

$$R(J_\alpha(t))\subset D(A(t)), \qquad \forall x\in R(I-\alpha A(t)) \qquad (I-\alpha A(t))J_\alpha(t)x=x. \quad (2)$$

Если $I-\alpha A(t)$ — инъективный оператор, то $J_\alpha(t)=(I-\alpha A(t))^{-1}$. В общем случае можно применить аксиому выбора. Из (2) следует, что $\forall x\in \in D(J_\alpha(t))$ $J_\alpha(t)x-x=\alpha A(t)J_\alpha(t)x$, а отсюда легко вывести, что если $m\in N$, $s=s_0\leqslant s_1\leqslant \ldots \leqslant s_m\leqslant T$, то

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant m} J_\alpha(s_i)x-x=\alpha\sum_{1\leqslant k\leqslant m} A(s_k)\prod_{1\leqslant i\leqslant k} J_\alpha(s_i)x, \quad (3)$$

если левая часть определена. Далее используем обозначение

$$U^\alpha(t, s)=\prod_{1\leqslant i\leqslant[(t-s)/\alpha]} J_\alpha(s+i\alpha), \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T. \quad (4)$$

С помощью (3) доказывается

Лемма. *Пусть* $(0, \infty)\ni\alpha_n\downarrow 0$, $s\in[0, T]$, $x\in D(U^{\alpha_n}(T, s))$ *при всех* $n\in N$ *и множество*

$$E(s, x\{\alpha_n\})=\left\{A(s+m\alpha_n)\prod_{1\leqslant i\leqslant m} J_{\alpha_n}(s+i\alpha_n)x \ : \ m, n\in N, m\alpha_n\leqslant T-s\right\} \quad (5)$$

*ограничено в* $X$. *Тогда* $\forall p\in P$ $\exists\mu_p\in[0, \infty)$ $p(U^{\alpha_n}(t, s)x-U^{\alpha_n}(\tau, s)x)\leqslant \leqslant\mu_p(|t-\tau|+\alpha_n)$.

Теорема 1. *Пусть* $\{A(t): t\in[0, T]\}$ — *коллективно sb-замкнутое семейство операторов в л.в.п.* $X$ *и выполнены условия леммы. Если* $x\in D(A(s))$ *и при всех* $t\in[s, T]$ *существует предел*

$$s\text{-}\lim U^{\alpha_n}(t, s)x=U(t, s)x,$$

*то* $u(t)=U(t, s)x$ — $wC^1$-*решение з.К.* (1) *и*

$$A(s+[(t-s)/\alpha_n]\alpha_n)U^{\alpha_n}(t, s)x\rightharpoonup A(t)U(t, s)x.$$

Доказательство, основанное на рассмотрении интеграла по $[s, t]$ от функции $\tau\to(A(s+[(\tau-s)/\alpha_n]\alpha_n)U^{\alpha_n}(\tau, s)x, f)$ использует тождество (3) и лемму. С их же помощью из теоремы 1 выводится

Теорема 2. *Пусть* $\{A(t): t\in[0, T]\}$ — *коллективно ww-замкнутое семейство операторов в л.в.п.* $X$ *класса* $\mathfrak{R}$, *причем*

$$\exists\delta>0 \quad ((0<\alpha<\delta, \ 0\leqslant t-\alpha, \ t\leqslant T)\Rightarrow(R(I-\alpha A(t))\supset\overline{D(A(t-\alpha))})) \quad (6)$$

*и, каковы бы ни были* $s\in[0, T]$, $x\in D(A(s))$ *и последовательность* $\{\alpha_n: n\in N\}$ *такая, что* $(0, \delta)\ni\alpha_n\downarrow 0$, *множество* $E(s, x, \{\alpha_n\})$ (см. (5)) *ограничено в* $X$.

*Тогда* $\forall s \in [0, T)$, $\forall x \in D(A(s))$ з.К. (1) *имеет* $wC^1$-*решение* $u(t) = w\text{-}\lim U^{\alpha_n}(t, s)x$, *где последовательность* $\alpha_n \downarrow 0$ *зависит, вообще говоря, от* $s$ *и* $x$.

Пример 1. Пусть $X$ есть $L_\infty(0, 1)$, найденное слабой* топологией, $\nu$, $T > 0$, $\mu \in C^1[0, T]$, $D(A(t)) = \{u \in AC[0, 1]: u(0) = \mu(t),\ 0 \leqslant u'(x) \leqslant \nu$ п.в. на $[0, 1]\}$, $A(t)u(x) = -a(t, u(x))u'(x)$, где $a(t, \xi) \geqslant 0$, непрерывна и не убывает по $\xi$ при $\mu(t) \leqslant \xi \leqslant \mu(t) + \nu$, $t \in [0, T]$. Если $0 \leqslant -\mu'(\tau) \leqslant \nu a(t, \mu(t))$, $0 \leqslant t - \delta \leqslant \tau \leqslant t$, то операторы $A(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Поэтому задача

$$u_t + a(t, u)u_x = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in (0, 1), \quad u(t, 0) = \mu(t), \tag{7}$$
$$u(0, x) = u_0(x)$$

разрешима в целом, если $u_0 \in D(A(0))$, причем решение Липшиц-непрерывно по $(t, x)$ и $0 \leqslant u_x(t, x) \leqslant \nu$.

Определение 4. Семейство операторов $\{A(t): t \in [0, T]\}$ в л.в.п. $X$ порождает эволюционную систему класса $(wC^1)$, если существует семейство операторов $U(t, s): \overline{D(A(s))} \to \overline{D(A(t))}$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, такое, что

(I) $U(s, s) = I$, $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant T$;

(II) $\forall s \in [0, T)$, $\forall x \in D(A(s))$ $u(t) = U(t, x)x$ – $wC^1$-решение з.К. (1);

(III) $\forall s \in [0, T)$ семейство операторов $\{U(t, s): s \leqslant t \leqslant T\}$ равностепенно непрерывно.

Если $\overline{D(A(t))} = \overline{D}$ не зависит от $t$ и выполнено условие

(IV) $\forall x \in \overline{D}$ функция $(t, s) \to U(t, s)x$ непрерывна при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$,

то будем говорить, что эволюционная система $U(t, s)$ принадлежит классу $(wC^1, C_0)$. Семейство операторов $U(t, s): \overline{D} \to \overline{D}$, обладающее свойствами (I), (III), (IV), назовем эволюционной системой класса $(C_0)$ на множестве $\overline{D}$.

Теорема 3. *Допустим, что выполнены предположения теоремы 2 и, кроме того, следующие 2 условия*:

$(U)$ $\forall s \in [0, T)$, $\forall x \in D(A(s))$ з.К. (1) *имеет не более одного* $wC^1$-*решения*;

(C) $\forall s \in [0, T)$ *семейство операторов* $\{\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} J_\alpha(s + i\alpha): \alpha \in (0, \delta),\ 0 \leqslant m\alpha \leqslant T - s\}$ *равностепенно непрерывно на множестве* $\overline{D(A(s))}$.

*Тогда семейство операторов* $\{A(t): t \in [0, T]\}$ *порождает эволюционную систему* $U(t, s)$ *класса* $(wC^1)$, *причем* $\forall x \in \overline{D(A(s))}$ $U(t, s)x = w\text{-}\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} U^\alpha(t, s)x$.

В следующем определении мы вводим полускалярные произведения в л.в.п., в терминах которых удобно формулировать теоремы единственности и существования для нелинейных эволюционных уравнений.

Определение 5. Пусть $x, z \in X$, $p \in P$. Обозначим $G(x, p) = \{f \in X': (x, f) = p(x),\ \forall y \in X\ |(y, f)| \leqslant p(y)\}$. Это множество непусто ([1], следствие 2 теоремы 3, гл. II). Положим

$$F(x, p) = p(x)G(x, p), \quad \langle z, x\rangle_p = \inf\{(z, f): f \in F(x, p)\}.$$

На самом деле здесь inf можно заменить на min. Если $p(y) = \sqrt{\langle y, y\rangle}$, где $\langle \cdot, \cdot\rangle$ – скалярное произведение на $X$, то $\forall x,\ z \in X$ $\langle z, x\rangle_p \leqslant \langle z, x\rangle$.

Теорема 4. *Пусть* $\{A(t): t \in [0, T]\}$ – *семейство операторов в л.в.п.* $X$. *Допустим, что для любой преднормы* $p \in P$ *и любых ограниченных множеств* $B, C \subset X$ *найдется непрерывная функция* $\omega_{B, C, p}: [0, T] \to [0, \infty)$ *такая, что если* $x, y \in D(A(t)) \cap B$, $A(t)x$, $A(t)y \in C$, *то* $\langle A(t)x - A(t)y, x - y\rangle_p \leqslant \omega_{B, C, p}(t)(p(x - y))^2$

*Тогда, если $u, v$ — два $wC^1$-решения уравнения $du(t)/dt=A(t)u(t)$, то* $\forall p\in P$

$$p(u(t)-v(t))\leq p(u(s)-v(s))\exp\left(\int_s^t \omega_{B,C,p}(\tau)\,d\tau\right),\quad 0\leq s\leq t\leq T,$$

*где $B, C$ — ограниченные множества, зависящие только от $u, v$.*

Следствие. *В предположениях теоремы 4 з.К.* (1) *имеет не более одного $wC^1$-решения.*

Доказательство теоремы 4 основано на обобщении леммы 1.3 из ([2]) и неравенстве Гронуолла.

Теорема 5. *Пусть $\{A(t): t\in[0,T]\}$ — семейство операторов в секвенциально полном л.в.п. $X$, $\forall t\in[0,T]$ $D(A(t))=D$ и выполнены следующие условия*:

1°) $\exists\delta>0$ $\forall\alpha\in(0,\delta)$, $\forall t\in[0,T]$ $R(I-\alpha A(t))\supset\bar{D}$;

2°) $\forall p\in P$ $\exists\omega_p\in R$ $\langle A(t)x-A(t)y,\ x-y\rangle_p\leq\omega_p(p(x-y))^2$, $x, y\in D(A(t))$;

3°) *Для любого ограниченного множества $B\subset X$ и любой преднормы $p\in P$ найдется $\lambda_{B,p}\geq0$ такое, что $\forall x\in D\cap B$*

$$p(A(t)x-A(\tau)x\leq\lambda_{B,p}(1+p(A(t)x)+p(A(\tau)x))\,|t-\tau|.$$

*Тогда $\forall x\in\bar{D}$ $\exists s\text{-}\lim\limits_{\alpha\downarrow0} U^\alpha(t,s)x=U(t,s)x$, $0\leq s\leq t\leq T$, причем семейство операторов $U(t,s)$ является эволюционной системой класса $(C_0)$ на множестве $\bar{D}$ и*

$$\forall p\in P\quad p(U(t,s)x-U(t,s)y)\leq\exp(\omega_p(t-s))p(x-y). \tag{8}$$

*Если $\forall t\in[0,T]$ оператор $A(t)$ sb-замкнут, то $U(t,s)$ — эволюционная система класса $(wC^1, C_0)$, порожденная семейством операторов $\{A(t): t\in[0,T]\}$.*

Замечание. В случае, когда $X$ — $B$-пространство, теорема 5 содержит теоремы 1, 2 из ([2]), 4.1 из ([3]), 5.1 и 6.2 из ([4]) и пересекается с теоремами 2.1, 3.3, 3.4 из ([7]).

При доказательстве первого утверждения теоремы 5 используется эквивалентность $(\langle y,x\rangle_p\leq\omega(p(x))^2)\Leftrightarrow(\forall\alpha\supset0\quad p(x-\alpha y)\geq(1-\alpha\omega)p(x))$ (ср. с леммой 1.1 из ([2])) и техника работы ([7]). Второе утверждение получается с помощью теоремы 1. Подчеркнем, что в условиях теоремы 5 операторы $I-\alpha A(t)$ могут не быть инъективными.

Из варианта теоремы 3 и теоремы 4 следует

Теорема 6. *Коллективно ww-замкнутое семейство операторов $\{A(t): t\in[0,T]\}$ в л.в.п. $X$ класса $\mathfrak{K}$ порождает эволюционную систему класса $(wC^1)$, удовлетворяющую оценке* (8), *если множества $R(A(t))$, $0\leq t\leq T$, ограничены в совокупности и выполнены условие* (6) *и условие* 2°) *теоремы* 5.

Пример 2. Если в примере 1 предположить дополнительно, что $a(t,\xi)$ непрерывно дифференцируема по $\xi$, то операторы $A(t)$, рассматриваемые в пространстве $X=L_2(0,1)$, удовлетворяют условиям теоремы 6. В этом случае решение задачи (7) единственно и устойчиво по $u_0$ в норме $L_2$.

Автор благодарен Г. И. Лаптеву за помощь при подготовке статьи, а также М. М. Вайнбергу, Р. С. Гусаровой и И. М. Лаврентьеву за полезное обсуждение.

Латвийский государственный университет
им. П. Стучки
Рига

Поступило
21 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Робертсон, В. Робертсон, Топологические векторные пространства, М., 1967. [2] T. Kato, J. Math. Soc. Japan, **19**, 4, 508 (1967). [3] R. H. Martin, J. Math. Soc. Japan, **22**, 3, 411 (1970). [4] S. Oharu, J. Math. Soc. Japan, **22**, 4, 526 (1970). [5] J. T. Chambers, S. Oharu, Pacif. J. Math., **39**, 1 ,89 (1971). [6] G. F. Webb, Trans. Am. Math. Soc., **155**, 2, 409 (1971). [7] M. G. Crandall, A. Pazy, Isr. J. Math., **11**, 1, 57 (1972). [8] S. Oharu, Proc. Japan Acad., **43**, 9, 847 (1967).