Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 517.9:533.7

АЭРОДИНАМИКА

О. С. РЫЖОВ, Э. Г. ШИФРИН

СИНГУЛЯРНЫЙ ВИХРЕВОЙ СЛОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОБТЕКАНИИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 19 VI 1973)

Устанавливается сингулярный закон изменения скорости потока вблизи тела в общем случае пространственного вихревого обтекания тела идеальной жидкостью — при приближении к телу нормальная производная скорости обращается в бесконечность. Этот результат первоначально был получен для случая сверхзвукового обтекания идеальным газом с отошедшей ударной волной как альтернатива условию экстремума энтропии на критической линии тока ([1], [2]). Дополнительный анализ показал, однако, что предположение о наличии отошедшей ударной волны в равномерном сверхзвуковом потоке не является существенным для доказательства. Поэтому указанный результат может быть распространен на общий случай пространственного обтекания тела произвольно завихренным потоком идеального газа. Ниже, без ограничения общности, это свойство устанавливается для идеальной несжимаемой жидкости.

Итак, рассмотрим пространственное обтекание тела вихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Будем считать, что на бесконечном расстоянии перед телом поток имеет постоянное направление. Это направление придадим оси x декартовой системы координат x, y, z. Как известно, при формулировке краевой задачи, описывающей движение жидкости около тела, должно быть задано полное давление $p_0(y, z)$ на бесконечном удалении от тела. Производные $\partial p_0/\partial y$ и $\partial p_0/\partial z$ определяют распределение вихрей в набегающем потоке. Будем иметь в виду общий случай, когда $p_0 \neq \mathrm{const}$ по крайней мере в некоторой трубке тока, содержащей тело, т. е. когда вблизи тела течение вихревое.

Для дальнейшего анализа необходимо сделать предположение о геометрической структуре потока вблизи тела. Именно, будем считать, что поверхность тока, соответствующая поверхности тела, получается при разветвлении на теле некоторой, так называемой «критической», линии тока. Такая схема течения не является единственно возможной. Например, при осесимметричном обтекании кольцевого крыла на нем разветвляется не критическая линия, а критическая поверхность тока. Тем не менее случай критической линии тока представляется достаточно типичным, по крайней мере для тел простой формы.

Следует отметить, что исследование геометрической структуры пространственного обтекания в указанном смысле представляет самостоятельную задачу, особенно важную в случае тела (или системы тел) сложной формы.

Введем вблизи тела и критической линии тока систему координат, связанную с поверхностями тока. Пусть W — плоскость $x = \mathrm{const}$ на бесконечном удалении перед телом, A — точка пересечения с этой плоскостью критической линии тока. Проведем на W семейство окружностей с центром в точке A. Поверхности тока, проходящие через окружности, будем считать координатным семейством $u_2 = u_2(x, y, z) = r$, где r — радиус индуцирующей u_2 окружности. При $r = 0$ поверхность u_2 распадается на критическую линию тока и поверхность тела. Обозначим через O точку встречи критической линии тока и поверхности тела; в точке O скорость равна нулю (рис. 1).

Проведем на поверхности тела в окрестности точки O замкнутый контур L, пересекающий каждую линию тока, выходящую из точки O, только один раз (точка O расположена на поверхности тела внутри L). Через каждую точку контура L проведем кривую N, не касающуюся линий тока на поверхности тела. Поверхности тока, проходящие через N, будем считать координатным семейством u_3. От координатного семейства u_1 (не яв-

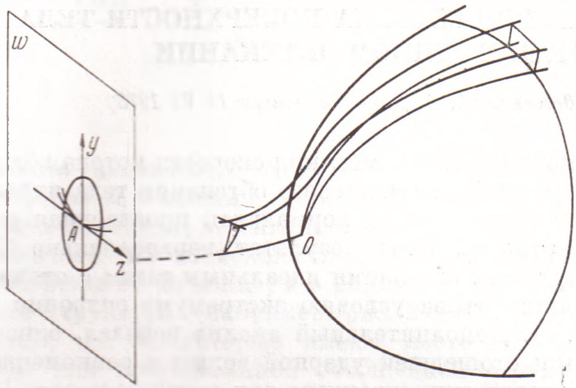

Рис. 1

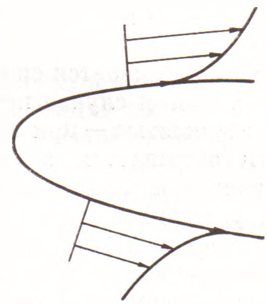

Рис. 2

ляющегося семейством поверхностей тока) потребуем только, чтобы оно содержало плоскость W.

Пусть построенная координатная система триортогональна в некоторой (произвольной) точке B на поверхности тела. Обозначим через F линию $u_3=\text{const}$ на плоскости W. Все линии F пересекаются в точке A, образуя узел, так как каждая поверхность u_3 непрерывна и содержит некоторую линию тока, выходящую из критической линии тока в точке O. Легко установить, что тип этого узла не зависит от выбора кривых N, направляющих семейства u_3; для простоты будем считать, что все кривые N ортогональны телу. Производные по направлениям линий пересечения поверхностей u_2 и u_3, u_1 и u_3, u_1 и u_2 будем обозначать $\partial./\partial s_i=h_i^{-1}\partial./\partial u_i$, $i=1$, 2, 3, где $h_i=(x_{u_i}{}^2+y_{u_i}{}^2+z_{u_i}{}^2)^{1/2}$ — коэффициенты Ламэ.

Уравнение неразрывности в форме закона сохранения массы для элементарной трубки тока, образованной поверхностями u_2, u_2+du_2, u_3, u_3+du_3, имеет вид

$$wh_2h_3|\sin\beta\cos\gamma|=G(u_2,\ u_3);$$

здесь w — модуль скорости, γ — угол между нормалью к поверхности u_1 и вектором скорости, β — угол между линиями пересечения поверхностей u_2 и u_3 с поверхностью u_1, $G(u_2,\ u_3)$ — произвольная функция, характеризующая расход газа через элементарную трубку тока, определяемая выбором семейств u_2, u_3.

Пусть V — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность. Умножив скалярно уравнение

$$(V\cdot\nabla)V+\frac{1}{\rho}\nabla p=0 \tag{1}$$

на единичный вектор n нормали к поверхности u_2 и на единичный вектор τ нормали к линии тока, касательный к поверхности u_2, получим, воспользовавшись уравнением Бернулли $p_0=p+\rho w^2/2$,

$$\varkappa_n=-\frac{\partial\ln w}{\partial n}+\frac{1}{\rho w^2}\frac{\partial p_0}{\partial n},\quad \varkappa_\tau=-\frac{\partial\ln w}{\partial\tau}+\frac{1}{\rho w^2}\frac{\partial p_0}{\partial\tau}; \tag{2}$$

здесь $\varkappa_n$ и $\varkappa_\tau$ — нормальная и геодезическая кривизны линии тока на поверхности u_2, $\partial./\partial n$ и $\partial./\partial\tau$ — производные по направлениям векторов n и τ.

В точке B на поверхности тела, в которой система координат триортогональна, уравнения (2) принимают вид

$$\varkappa_n = -\frac{\partial \ln w}{\partial s_2} + \frac{1}{\rho w^2}\frac{\partial p_0}{\partial s_2}, \quad \varkappa_\tau = -\frac{\partial \ln w}{\partial s_3}, \tag{3}$$

так как ввиду предположения о существовании критической линии тока полное давление постоянно на поверхности тела.

В связи с тем, что $p_0 = p_0(u_2, u_3)$, производная $\partial p_0/\partial s_2$ в точке B выражается через производную $\partial p_0/\partial s_2$ по направлению соответствующей линии F в точке A.

Используя уравнение (1), получим

$$\left.\frac{\partial p_0}{\partial s_2}\right|_B = \left.\frac{\partial p_0}{\partial s_2}\right|_A \cdot \frac{h_{2A}}{h_{2B}} = \left.\frac{\partial p_0}{\partial s_2}\right|_{A} \cdot \frac{(wh_3)_B}{(wh_3 \sin\beta)_A}. \tag{4}$$

Из того, что кривые F образуют в точке A узел, следует, что в плоскости W коэффициент Ламэ $h_3 \to 0$ при $u_2 \to 0$. В то же время семейство u_3 всегда можно пронумеровать так, чтобы на теле было $h_3 \neq 0$.

В произвольной точке B скорость не равна нулю и нормальная кривизна линии тока на поверхности тела ограничена. Из уравнений (3), (4) следует, что для ограниченности производных $\partial w/\partial n$ и $\partial p_0/\partial n$ на поверхности тела необходимо, чтобы производная $\partial p_0/\partial s_2$ по направлению соответствующей линии F в точке A на плоскости W обращалась в нуль.

Ввиду произвольности точки B, эта производная должна обращаться в нуль при перемещении по направлению к точке A вдоль любой линии F. Если узел линий F звездообразный (или частично звездообразный), то для ограниченности производной $\partial w/\partial n$ на поверхности тела необходимо, чтобы в точке A выполнялись необходимые условия существования экстремума полного давления. Тот же вывод получается и в случае не звездообразного узла, если все линии F не касаются в точке A поверхности $p_0 = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь случай, когда узел линий F в точке A не звездообразный и когда главное направление узла, которого касаются все линии F, само касается линии $p_0 = \mathrm{const}$. Введем на W систему координат с центром в точке A, направив ось z по главному направлению узла.

Пусть семейство u_3 в плоскости W задано в виде $F = F(y, z)$. При перемещении вдоль любой кривой F, не совпадающей с осью z, по направлению к точке A

$$F_z \to \infty, \quad F_y \to \infty, \quad dy/dz = -F_z/F_y \to 0, \tag{5}$$

где y, z — координаты точки на кривой F.

В точке C на кривой F

$$(h_3 \sin\beta)^{-1} = |\nabla F| = (F_z^2 + F_y^2)^{1/2}. \tag{6}$$

Производная $\partial p_0/\partial s_2$ по направлению линии F в точке C выражается как

$$\partial p_0/\partial s_2 = (F_z^2 + F_y^2)^{-1/2}(F_z p_{0y} - F_y p_{0z}). \tag{7}$$

Будем считать, что произвольная функция $p_0(y, z)$ определяет отличную от нуля завихренность на критической линии тока.

Система координат в плоскости W выбрана так, что $p_{0z} = 0$, $p_{0y} \neq 0$ и при регулярной завихренности вблизи точки A

$$p_{0z} = O(r), \quad p_{0y} = p_{0y}|_A + O(r), \quad p_{0y}|_A \neq 0, \quad r^2 = z^2 + y^2. \tag{8}$$

Если обозначить через D точку пересечения кривой N, проходящей через точку B, и линии тока, выпущенной из точки C, то значение производной $\partial p_0/\partial s_2$ в точке B можно вычислить с учетом (4), (6)–(8) как предел:

$$\left.\frac{\partial p_0}{\partial n}\right|_B=\left.\frac{\partial p_0}{\partial s_2}\right|_B=\lim_{\substack{C\to A\\ D(C)\to B}}\left.\frac{\partial p_0}{\partial s_2}\right|_C\cdot\frac{h_{2C}}{h_{2D}}=\lim_{\substack{C\to A\\ D(C)\to B}}\left.\frac{\partial p_0}{\partial s_2}\right|_C\frac{(wh_2\sin\beta\cos\gamma)_D}{(wh_3\sin\beta)_C}=$$

$$=\frac{w_Bh_{3B}}{w_A}\lim_{C\to A}\left.\frac{\partial p_0}{\partial s_2}\right|_C\cdot\frac{1}{(h_3\sin\beta)_C}=\frac{w_Bh_{3B}}{w_A}\lim_{C\to A}[p_{0y}|_AF_z+F_y\cdot O(r)]_C.$$

Выражение в квадратной скобке может остаться ограниченным при подходе к точке A не более чем вдоль изолированной кривой $F=\text{const}$. Поэтому при приближении к телу производная $\partial p_0/\partial s_2\to\infty$ (а значит, и $\partial w/\partial n\to\infty$) почти всюду на теле, по крайней мере как $F_z|_C\to\infty$ при $C\to A$ по соответствующей кривой F. (Заметим, что обращения в нуль завихренности в точке A, $p_{0y}|_A=p_{0z}|_A=0$, вообще говоря, недостаточно для ограниченности производной $\partial w/\partial n$ на поверхности тела).

Итак, если перед телом завихренность в окрестности критической линии тока не равна нулю, то при подходе к поверхности тела нормальная производная скорости неограниченно возрастает. При этом поверхность тела разделяется линиями тока на две части, на одной из которых $\partial w/\partial n\to+\infty$, а на другой $\partial w/\partial n\to-\infty$ (рис. 2).

В потенциальном течении, как следует из уравнения (2), производная $\partial w/\partial n$ на поверхности тела конечна.

Таким образом, наличие завихренности в районе критической линии тока при пространственном обтекании тела потоком идеальной жидкости приводит к образованию вблизи тела сингулярного вихревого слоя.

С точки зрения теории дифференциальных уравнений полученное свойство устанавливает оценку нормальной производной $\partial w/\partial n$ на поверхности тела. Различие в оценках для вихревого и безвихревого случаев, по-видимому, связано с тем, что класс потенциальных течений определяется частным решением уравнений движения идеальной жидкости, рассматриваемых, например, в форме Гельмгольца.

В заключение отметим, что обнаруженный вихревой слой в рамках движения вязкой жидкости индуцирует сингулярную асимптотическую зависимость сил трения на поверхности тела от числа Рейнольдса Re при $Re\to\infty$ ([3]).

Поступило
18 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *W. D. Hayes*, J. Fluid Mech., v. 19, № 3 (1964). [2] *Э. Г. Шифрин*, ПММ, т. 31, в. 3 (1967). [3] *О. С. Рыжов, Э. Г. Шифрин*, Изв. АН СССР, МЖГ, № 2 (1974).