Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 517.949.8

МАТЕМАТИКА

С. И. СЕРДЮКОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДВУМЯ ГРАНИЦАМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 2 VII 1973)

Рассматривается разностная краевая задача:

$$v_\nu(t+\tau)=\sum_{j=-r_1}^{r_2} A_j v_{\nu+j}(t),\quad t=n\tau\geqslant 0,\quad \nu=1,\ldots,N-1,$$
$$v_\nu(0)=f_\nu,\quad \sum_{\nu=1}^{N-1}|f_\nu|^2<\infty, \tag{$1_а$}$$

$$v_m(t)=\sum_{j=1}^{s1} C_{jm}v_j(t),\quad m=-r_1+1,\ldots,0,$$
$$v_{N+k}(t)=\sum_{j=1}^{s2} D_{jk}v_{N-j}(t),\quad k=0,\ldots,r_2-1. \tag{$1_б$}$$

Здесь $v_\nu(t)$ — векторы; A_j, C_{jm}, D_{jk} — постоянные матрицы; A_{-r_1}, A_{r_2} — невырожденные матрицы. Обозначим через $\mathscr{H}$ гильбертово пространство векторов $v=(v_{-r_1+1},\ldots,v_0,\ldots,v_{N+r_2-1})$, удовлетворяющих краевым условиям ($1_б$). Норма в $\mathscr{H}$ дается соотношением

$$\|v\|^2=\sum_{\nu=1}^{N-1}|v_\nu|^2.$$

Разностная краевая задача (1) устойчива, если существует постоянная c, не зависящая от τ, такая, что $\|v(t)\|\leqslant c\|v(0)\|$ для всех $t=n\tau\geqslant 0$ и всех $v(0)\subset\mathscr{H}$.

Запишем (1) в операторном виде:

$$v(t+\tau)=Gv(t).$$

Исследование устойчивости (1) сводится к оценке скорости роста $\|G^n\|$ при $n\to\infty$. Для устойчивости (1) необходимо, чтобы были устойчивы следующие три задачи ([1]): а) задача Коши; б) левая полубесконечная краевая задача; в) правая полубесконечная краевая задача. В настоящее время известны ([2-6]) необходимые и достаточные условия устойчивости задач а)—в). В общем случае из устойчивости задач а)—в) следует ограниченность $\|G^n\|$ для $n\leqslant cN$. В предлагаемой работе получены оценки скорости роста $\|G^n\|$ при $n\gg N$.

Дадим классификацию систем разностных уравнений. Если задача Коши устойчива, то собственные значения характеристической матрицы

$\lambda(\varphi)$ в окрестности определяющих точек φ_0 допускают ([3]) разложение вида

$$\lambda(\varphi)=\exp\left\{i\psi_0+i\gamma(\varphi-\varphi_0)+i\sum_{j=p}^{2\mu}\alpha_j(\varphi-\varphi_0)^j-\beta(\varphi-\varphi_0)^{2\mu}+\ldots\right\};$$

здесь γ, α_j действительные, $p\geqslant 2$, $\beta>0$.

Систему разностных уравнений (1_a) назовем параболической, если $\gamma=0$ для всех $\lambda(\varphi)$ относительно всех определяющих точек φ_0. В противном случае будем называть систему гиперболической.

Теорема. *Пусть* (1_a) — *параболическая система. Тогда, если задачи* а)—в) *устойчивы, то* $\|G^n\|\leqslant c_1$ *при* $n\leqslant c_2N^\omega$, *где* $\omega=\min(2\mu/(2\mu-p+1))$. *Минимум берется по всем* $\lambda(\varphi)$ *и всем определяющим точкам* φ_0. *Так как* $2\mu\geqslant p\geqslant 2$, *то* $\omega>1$.

Замечание. Простейшая разностная аппроксимация уравнения теплопроводности (см., например, ([7]), стр. 107) дает пример параболической системы с порядком параболичности $\omega=2$.

Доказательство теоремы. Представим G^n в виде контурного интеграла от резольвенты:

$$G^n=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma z^n(G-zI)^{-1}\,dz;$$

Γ — произвольный контур, охватывающий все точки спектра оператора G. Так как спектр G лежит в единичном круге $|z|\leqslant 1$, в качестве Γ можно взять окружность $|z|=1+\rho$.

Строим ([4, 6]) явное представление резольвенты:

$$w_j^{\mathrm{I}}=\sum_{\nu=1}^{j-1}M_{11}^{j-\nu-1}(Tg_\nu)^{\mathrm{I}}+M_{11}^{j-1}w_1^{\mathrm{I}},\quad j=2,\ldots,N-1,$$

$$w_j^{\mathrm{II}}=M_{22}^{j-N}w_N^{\mathrm{II}}-\sum_{\nu=j}^{N-1}M_{22}^{j-\nu-1}(Tg_\nu)^{\mathrm{II}},$$

$$w_1^{\mathrm{I}}=(K_1-K_2M_{22}^{-N+1}K_4^{-1}K_3M_{11}^{N-1})^{-1}\Bigg(K_2\sum_{\nu=1}^{N-1}M_{22}^{-\nu}(Tg_\nu)^{\mathrm{II}}+\sum_{\nu=1}^{s}(B_\nu^{\mathrm{I}}(Tg_\nu)^{\mathrm{I}}+$$

$$+B_\nu^{\mathrm{II}}(Tg_\nu)^{\mathrm{II}})+K_2M_{22}^{-N+1}K_4^{-1}\Bigg(-K_3\sum_{\nu=1}^{N-1}M_{11}^{N-\nu-1}(Tg_\nu)^{\mathrm{I}}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{t}D_\nu^{\mathrm{I}}(Tg_{N-\nu-1})^{\mathrm{I}}+D_\nu^{\mathrm{II}}(Tg_{N-\nu-1})^{\mathrm{II}}\Bigg)\Bigg),$$

$$w_N^{\mathrm{II}}=(K_4-K_3M_{11}^{N-1}K_1^{-1}K_1M_{22}^{-N+1})^{-1}\Bigg(-K_3\sum_{\nu=1}^{N-1}M_{11}^{N-\nu-1}(Tg_\nu)^{\mathrm{I}}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{t}(D_\nu^{\mathrm{I}}(Tg_{N-\nu-1})^{\mathrm{I}}+D_\nu^{\mathrm{II}}(Tg_{N-\nu-1})^{\mathrm{II}})+K_3M_{11}^{N-1}K_1^{-1}\times$$

$$\times\Bigg(K_2\sum_{\nu=1}^{N-1}M_{22}^{-\nu}(Tg_\nu)^{\mathrm{II}}+\sum_{\nu=1}^{s}B_\nu^{\mathrm{I}}(Tg_\nu)^{\mathrm{I}}+B_\nu^{\mathrm{II}}(Tg_\nu)^{\mathrm{II}}\Bigg)\Bigg).$$

Матрицы T, M_{11}, M_{22}, K_1, K_2, B_ν^{I}, B_ν^{II} определены в ([4, 6, 8]); матрицы K_3, K_4, D_ν^{I}, D_ν^{II} определяются аналогично матрицам K_1, K_2, B_ν^{I}, B_ν^{II}. Из устойчивости задачи Коши следует [6] ряд ограничений на порядки нулей внедиагональных элементов матриц M_{11}, M_{22}. Из устойчивости задачи б), в) следует [6] ряд ограничений на порядки особенностей элементов K_1^{-1}, K_4^{-1}. Учитывая все эти ограничения и оценивая сверху число слагаемых элементов матрицы $(K_1^{-1}K_2M_{22}^{-N+1}K_4^{-1}K_3M_{22}^{N-1})^s$ через c^s, исходную задачу можно свести к оценке рядов вида

$$\gamma_{\nu n}=\sum_{s=0}^{\infty}c^s\nu^m\left|\int\limits_{|z|=1+\rho}\varkappa^\nu\varphi^{m(2\mu-p+1)/p-\xi}\prod_{l=1}^{L}(P_l(N\varphi^{(2\mu_l-p_l+1)/p_l},\varphi)\varkappa_l^N)^{s_l}e^{in\varphi}\,d\varphi\right|;$$

здесь $\varkappa$, $\varkappa_l$ — собственные значения матриц M_{11}, M_{22}^{-1}; $P_l(t,\ \varphi)$ — многочлены конечного порядка по t с аналитическими по φ коэффициентами; $\xi\leqslant 1-1/(2p)$, $\sum\limits_{l=1}^{L}s_l=s$.

Фиксируем k и рассмотрим такие наборы s_l, в которых $s_k\geqslant s/L$. Последовательно перебираем все $k=1, 2, \ldots, L$. При фиксированном k для асимптотических значений ν в окрестности определяющих точек исходный контур интегрирования деформируется в кусок линии наискорейшего спуска функции $\varkappa^\nu\varkappa_k^{s_kN}e^{in\varphi}$, проходящий через точку перевала. Остальные $P_l^{s_l}\varkappa_l^{Ns_l}$ на построенном контуре оцениваются сверху по модулю константой. Асимптотические вычеты $\varkappa^\nu\varkappa_k^{s_kN}e^{in\varphi}$ таковы, что обеспечивают суммируемость рядов $\gamma_{\nu n}$ по s и ограниченность $\sum\limits_{\nu=1}^{N-1}|\gamma_{\nu n}|^2$ при $n\leqslant cN^\omega$. Теорема доказана.

Таким образом, если задачи а)—в) устойчивы, то для параболических систем $\|G^n\|\leqslant c_1$ при $n\leqslant c_2N^\omega$, где $\omega>1$. Для гиперболических систем оценка $\|G^n\|\leqslant c_1$ справедлива при $n\leqslant c_2N$. Ниже приводятся примеры неустойчивых разностных краевых задач с двумя границами, которым отвечают устойчивые задачи а)—в). Эти примеры показывают, что полученные оценки скорости роста $\|G^n\|$ не улучшаемы на рассматриваемых классах систем разностных уравнений.

Пример 1. Непрерывная краевая задача

$$\begin{array}{ll} u_t+u_x=0, & t\geqslant 0,\\ v_t-v_x=0, & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{array}\quad\left|\begin{array}{l} u(0,t)=\sigma_1v(0,t)\\ v(1,t)=\sigma_2u(1,t)\end{array}\right|\begin{array}{l} u(x,0)=f_1(x),\\ v(x,0)=f_2(x)\end{array}$$

аппроксимируется разностной краевой задачей. Внутри области используется схема Лакса (см. [7], стр. 100). Предполагается, что $\alpha=\tau/h\leqslant 1$; τ, h — шаги сетки по t, x. Задачи а)—в) устойчивы [6, 7]. Строим резольвенту (2). Начальные данные подбираем так, чтобы выделить элемент матрицы возмущения $\tilde{M}$, имеющий максимальный порядок особенности.

$$\tilde{M}=(E-K_1^{-1}K_2M_{22}^{-N+1}K_4^{-1}K_3M_{11}^{N-1})^{-1}.$$

Оценка скорости роста $\|G^n\|$ при $n\to\infty$ сводится к оценке интеграла

$$I_{\nu n}=\int\limits_{|z|=1+\rho}\varkappa^\nu z^n/(1+\sigma\varkappa^{2N})\,dz,\quad \sigma=\sigma_1\sigma_2,\quad z=e^{i\varphi},$$

$$\varkappa(\varphi)=\exp\left\{-\frac{i\varphi}{\alpha}-\frac{1-\alpha^2}{2\alpha^3}\varphi^2+\ldots\right\}.$$

Асимптотика $I_{\nu n}$ дается суммой вычетов относительно полюсов, попадающих в ε-окрестность определяющей точки $\varphi=0$:

$$\varphi_k=-\frac{i\ln\sigma+2k\pi}{2N(1+O(\varepsilon))}$$

Считаем вычеты и суммируем их по k. Получаем оценку

$$\|G^n\|^2 > \frac{1}{N}\sigma^{n/N}, \qquad n \gg N.$$

При $\sigma > 1$ имеем неустойчивость.

Замечание. Если «гиперболическая система» имеет наклонные характеристики постоянного знака, то $\|G^n\| \leqslant c_1$ при $n \leqslant e^{c_2 N}$.

Пример 2. Параболическая система

$$\begin{array}{ll|l|l} u_t = u_{xx}, & t \geqslant 0 & u_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 & u(x,0) = f_1(x), \\ v_t = v_{xx}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 & v(0,t) = \sigma_1 u(0,t),\ u(1,t) = \sigma_2 v(1,t) & v(x,0) = f_2(x). \end{array}$$

Внутри области используется схема-тренога (см. ([7]), стр. 107), на границе счет ведется по формулам

$$u_0^n = u_1^n, \quad v_0^n = \sigma_1 u_1^n, \quad v_N^n = v_{N-1}^n, \quad u_N^n = \sigma_2 v_{N-1}^n.$$

При $\alpha = \tau/h^2 \leqslant 1/2$ задача а)—в) устойчивы. Начальные данные выбираются по тому же принципу, что и в примере 1.

$$I_{\nu n} = \int\limits_{|z|=1+\rho} \frac{\varkappa^{2N+\nu} z^n\, dz}{(1-\varkappa)\,(1-(2-\sigma\varkappa^{-1}(1+\varkappa)^2)\,\varkappa^{2N} + \varkappa^{4N})}, \quad \varkappa = \exp[-(i\varphi/\alpha)^{1/2} + \ldots].$$

При $\sigma = \sigma_1\sigma_2 > 1$ уравнение $t^2 - 2(1-2\sigma)t + 1 = 0$ имеет два вещественных корня t_1, t_2, $|t_1| < 1$. Справедлива оценка

$$\|G^n\|^2 > \frac{1}{N}\exp\frac{\alpha n}{2N^2}\ln^2|t_1|, \quad n \gg N^2.$$

Приношу благодарность Н. С. Бахвалову за полезные обсуждения и внимание к работе.

Объединенный институт ядерных исследований
Дубна Московской обл.

Поступило
24 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *H.-O. Kreiss*, Proc. Adv. Symp., N. Y., 1966, MP 35-5156, p. 141. [2] *H.-O. Kreiss*, Math. Scand., v. 7, 71 (1959). [3] *В. Я. Урм*, ДАН, т. 139, № 1, 40 (1961). [4] *H.-O. Kreiss*, Math. of Comp., v. 22, 104, 703 (1968). [5] *B. Gustafsson, H.-O. Kreiss*, Math. of Comp., v. 26, 649 (1972). [6] *С. И. Сердюкова*, ДАН, т. 208, № 1, 52 (1973). [7] *В. Вазов, Дж. Форсайт*, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1963. [8] *С. И. Сердюкова*, ДАН, т. 200, № 1, 39 (1971).