Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 533.951.8

ФИЗИКА

Т. Р. СОЛДАТЕНКОВ, В. П. СИДОРОВ

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ НА ВИНТОВУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ С ТОКОМ

(Представлено академиком Б. Б. Кадомцевым 29 V 1973)

1. Известно, что при протекании тока по цилиндрическому плазменному шнуру, имеющему свободную границу, развивается нелокальная винтовая неустойчивость. Эта неустойчивость, согласно [1], имеет место в сравнительно широком интервале значений коэффициента запаса $q=aH_z/R\bar{H}_\varphi$

$$m-1+(a/b)^{2m}<nq<m; \qquad (1,1)$$

здесь m и n — азимутальное и продольное волновые числа, a и b — радиусы плазменного шнура и кожуха соответственно. Максимальный инкремент неустойчивости при однородном распределении плотности тока не зависит от номера моды m и равен

$$\gamma_{\max}=\bar{H}_\varphi(a)/(8\pi\rho a^2)^{1/2}.$$

В ряде работ изучалась возможность динамической стабилизации этой неустойчивости с помощью высокочастотных (в.ч.) полей [2-6]. В настоящей работе проведем исследование устойчивости плазменного шнура со свободной границей при протекании по нему продольного тока, имеющего постоянную и в.ч. ($\sim\cos(\Omega t-m_0\varphi)$) составляющие:

$$\mathbf{I}=\mathbf{e}_z\{\bar{I}+\tilde{I}\cos(\Omega t-m_0\varphi)\}; \qquad (1,2)$$

здесь m_0 — мультипольность в.ч. тока. Постоянная составляющая тока $\bar{I}$ имеет либо скинированное ($\alpha=0$), либо однородное ($\alpha=1$) распределение по сечению шнура.

Проникновение в.ч. составляющей тока при частотах $\Omega\ll\omega_{pe}$, обычно используемых в экспериментах, мало. Поэтому конечность скин-слоя в задаче не учитывается и, следовательно, параметры в.ч. полей входят в теорию посредством граничных условий. Аналогичная задача в близкой постановке решалась в [4], однако примененный автором метод решения позволил исследовать лишь возмущения с $m=1$. В данной работе разработан метод решения задачи, позволивший исследовать влияние в.ч. составляющей тока на устойчивость винтовых колебаний с произвольной модой m.

Устойчивость динамических систем, как известно, описывается системой дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Поэтому решение для вектора смещения плазмы Ψ следует искать в виде

$$\Psi=\sum_{s,s'=-\infty}^{\infty}\Psi_{ss'}(r)\exp[i(\omega_s t+m_{s'}\varphi+k_z z)], \qquad (1,3)$$

$$\omega_s=\omega+s\Omega, \qquad m_{s'}=m+s'm_0.$$

Такое представление вектора Ψ сводит исходную систему дифференциальных уравнений и граничных условий к бесконечной системе зацепляющихся алгебраических уравнений. Наличие малого параметра позволяет оборвать эту цепочку и провести исследование устойчивости как в среднем ($s=s'=0$), так и параметрических резонансов ($s\neq0$, $s'\neq0$).

2. Для получения дисперсионного уравнения воспользуемся непрерывностью тензора потока импульса

$$\left\{\left[P\delta_{ik}+\rho v_i v_k+\frac{1}{4\pi}\left({}^1/{}_2H^2\delta_{ik}+{}^1/{}_2E^2\delta_{ik}-H_iH_k-E_iE_k\right)\right]n_k\right\}=0 \qquad (2{,}1)$$

на возмущенной поверхности плазмы $r=a+\Psi\cdot\mathrm{n}$; $\mathrm{n}=\{1,\ -\frac{im}{a}\Psi_r,\ -ik_z\Psi_r\}$ — единичный вектор нормали.

Подставив в (2,1) соответствующие выражения для возмущенных величин в случае в.ч. поля нулевой моды ($m_0=0$), получим бесконечную систему зацепляющихся алгебраических уравнений

$$A_{s+1}\Psi_{s+2}+B_s\Psi_{s+1}+(C_s-a_s)\Psi_s+B_s\Psi_{s-1}+A_{s-1}\Psi_{s-2}=0. \qquad (2{,}2)$$

Обращение в нуль детерминанта системы (2,2) дает искомое дисперсионное уравнение.

Для производных длин волн возмущений и частот в.ч. поля коэффициенты A_s, B_s, C_s являются достаточно сложными функциями частот ω_s. В том случае, когда вакуумная длина волны в.ч. поля гораздо больше продольной длины волны возмущения ($k_zc\gg\Omega a$), коэффициенты A_s, B_s, C_s перестают зависеть от индекса s и принимают вид

$$A_s=A=-\frac{\hbar^2}{2}(m^2\varphi(k_z)+1),\quad B_s\equiv B=-\hbar(md_e\varphi(k_z)+1),$$
$$C_s\equiv C=\alpha^2-1-d_e^2\varphi(k_z)-\frac{\hbar^2}{2}(m^2\varphi(k_z)+1), \qquad (2{,}3)$$

где

$$\hbar=\frac{\tilde{H}_\varphi(a)}{\overline{H}_\varphi(a)},\quad \varphi(k_z)=\frac{1}{k_z}\frac{K_m(k_z)}{K_m'(k_z)},\quad k_z=\frac{an}{R},\quad d_e=m-nq_e,\quad q_e=\frac{aH_{ze}}{(R\overline{H}_\varphi)}.$$

В этом случае система уравнений (2,2) соответствует уравнению Хилла ([7]). Выражение для a_s содержит искомую частоту ω_s и при различных предположениях относительно сжимаемости плазмы ($\operatorname{div}\Psi=0$ или $\operatorname{div}\Psi\neq0$) и характера распределения постоянного тока по сечению шнура ($\alpha=0$ или $\alpha=1$) имеет вид

$$a_s=(d_i^2-\hat{\omega}_s^2)F(\hat{\omega}_s), \qquad (2{,}4)$$

где

$$F(\hat{\omega}_s)=\begin{cases}(\beta_s^2-1)/(m\beta_s-\varphi_{1s}) & \text{при } \operatorname{div}\Psi=0,\ \alpha - \text{произвольное},\\ -\varphi_{2s}^{-1} & \text{при } \operatorname{div}\Psi\neq0,\ \alpha=0.\end{cases}$$

Здесь введены обозначения:

$$\varphi_{1,2;s}=\delta_{1,2;s}J_m'(\delta_{1,2;s})/J_m(\delta_{1,2;s}),\quad \delta_{1s}=k_z^2(\beta_s^2-1),$$
$$\delta_{2s}^2=(d_i^2-\hat{\omega}_s^2)(k_z^2u^2-\hat{\omega}_s^2)/[\hat{\omega}_s^2(h_i^2+u^2)-u^2q_i^2],$$
$$q_i=aH_{zi}/(R\overline{H}_\varphi),\quad \beta_s^2=2\alpha d_i/(d_i^2-\hat{\omega}_s^2),\quad d_i=\alpha m-nq_i,$$
$$u^2=c_{зв}^2/c_{H_\varphi}^2,\quad \hat{\omega}_s^2=a^2\omega_s^2/c_{H_\varphi}^2,\quad h_i=H_{zi}/\overline{H}_\varphi.$$

Рассмотрим случай, когда аргументы функций Бесселя в выражении (2,4) малы, что соответствует длинноволновому пределу. Оказывается, что в этом приближении

$$a_s=\frac{1}{|m|}(\hat{\omega}_s^2-d_i^2-2\alpha d_i) \qquad (2{,}5)$$

для всех $m\neq0$ и не зависит от предположения о сжимаемости плазмы.

Критерии устойчивости могут быть получены из решения бесконечного определителя системы (2,2). При наличии малого $\hbar=\tilde{H}_\varphi(a)/\overline{H}_\varphi(a)$ эле менты боковых диагоналей A и B пропорциональны $\tilde{h}^2$, $\tilde{h}$ соответственно. Решение дисперсионного уравнения в этом случае представимо в виде ряда по степеням h.

Рассмотрим более детально первые зоны ($s=0, 1$) параметрического возбуждения ([8]) колебаний плазмы. При $s=0$ дисперсионное уравнение в первом приближении сводится к обращению в нуль коэффициента $(C-a_0)$ при Ψ_0 в (2,2)

$$\frac{1}{|m|}\hat{\omega}^2=\alpha^2-1-d_e\varphi(k_z)-\frac{\tilde{h}^2}{2}(m^2\varphi(k_z)+1)+\frac{1}{|m|}(d_i{}^2-2\alpha d_i)\equiv G, \quad (2,6)$$

а с учетом боковых гармоник, пропорциональных $\tilde{h}$, к равенству нулю определителя

$$\begin{vmatrix} C-a_1 & B & 0 \\ B & C-a_0 & B \\ 0 & B & C-a_{-1} \end{vmatrix}=0. \quad (2,7)$$

Из (2,7) легко получаем выражение для ω^2

$$\frac{\omega^2 a^2}{|m|\,c^2_{H_\varphi}}=G+\frac{2\,|m|\,B^2C^2_{H_\varphi}}{d^2\Omega^2}, \quad (2,8)$$

а следовательно, и условие устойчивости ($\omega^2\geqslant 0$)

$$G+\frac{2\,|m|\,c^2_{H_\varphi}\tilde{h}^2}{a^2\Omega^2}(md_e\varphi(k_z)+1)^2\geqslant 0. \quad (2,9)$$

Анализ критерия устойчивости (2,9) в случае длинноволновых колебаний при $\alpha=1$, $H_{zi}=H_{ze}=H$ и $c_{H_\varphi}{}^2\ll a^2\Omega^2$ позволяет определить интервал значений nq, при которых развивается неустойчивость:

$$-\frac{\Lambda}{2}\left(1+\frac{\tilde{h}^2}{2}\right)<nq<1+\frac{\Lambda\tilde{h}^2}{4} \quad \text{при } m=1, \quad (2,10)$$

$$\Lambda=k_z{}^2\ln\frac{2}{\gamma k_z}, \quad \gamma=1{,}98;$$

$$m-{}^1\!/_2[1+(1-\tilde{h}^2(m^2-|m|))^{1/2}]<nq<m-{}^1\!/_2[1-(1-\tilde{h}^2(m^2-|m|))^{1/2}]. \quad (2,11)$$

Из критерия (2,10) следует, что даже при значительном увеличении амплитуды переменного тока область неустойчивости практически не расширяется. Следовательно, наличие переменного поля позволяет увеличить суммарный ток, пропускаемый по плазме. В частности, когда постоянная составляющая тока отсутствует ($\bar{I}=0$), критическое значение, $\tilde{I}$, при котором наступает неустойчивость, есть

$$\tilde{I}_{\text{кр}}=10aH_z(\ln R/a)^{-1/2}, \quad (2,12)$$

что превышает критическое значение постоянного тока $I_{\text{кр}}=5a^2H_z(qR)^{-1}$.

Из (2,11) видно, что в.ч. поле эффективно стабилизирует возмущения с $m>1$. Стабилизация проявляется как в уменьшении максимального инкремента неустойчивости

$$\gamma_{\max}=\frac{c_{H_\varphi}}{2^{1/2}a}\left[1-\tilde{h}^2(m^2-|m|)\right]^{1/2}, \quad (2,13)$$

так и в сужении интервала неустойчивых nq. Более того, существует критическое значение переменного магнитного поля

$$\tilde{h}_{\text{кр}}{}^2=(m^2-|m|)^{-1}, \quad (2,14)$$

при котором неустойчивость с $m>1$ стабилизируется. Таким образом, пр $\tilde{h} \geqslant \tilde{h}_{кр}$ условие устойчивости (2,9) для $m>1$ выполняется при сколь угодн малом значении коэффициента запаса nq; при $\tilde{h}<\tilde{h}_{кр}$ для стабилизаци требуется продольное магнитное поле H_z, определяемое из условия

$$naH_z/(R\overline{H}_\varphi)>m-{}^1/_2\{1-[1-\tilde{h}^2(m^2-|m|)]^{1/2}\}. \qquad (2{,}15$$

Характерная зависимость инкремента неустойчивости от параметра n приведена на рис. 1, из которого видно, что максимальное значение инкре мента падает с ростом моды возмущения m.

Условие (2,9) является лишь необходимым, но недостаточным, посколь ку с увеличением величины G в системе появляется параметрическая рас

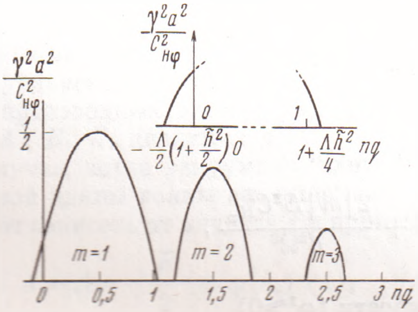

Рис. 1. Зависимость инкремента винтовой неустойчивости от коэффициента запаса устойчивости q при стабилизации в.ч. полем нулевой моды. Критическое в.ч. поле принято равным $\tilde{H}_\varphi{}^2/\overline{H}_\varphi{}^2={}^1/_{12}$

качка неустойчивости [8]. Найдем условие параметрического резонанса первой зоне ($s=1$), приравняв нулю определитель

$$\begin{vmatrix} C-a_1 & B \\ B & C-a_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2{,}16$$

Из (2,16) методом последовательных приближений определяем собс венные значения частоты

$$\omega^2=|m|Gc_{H_\varphi}{}^2/a^2, \quad \omega=\pm{}^1/_2\Omega, \qquad (2{,}17$$

при которой наступает параметрический резонанс, и ширину зоны пар метрического возбуждения колебаний

$$-4|m|c_{H_\varphi}{}^2B/(a^2\Omega^2)<[(2\omega)^2-\Omega^2]/\Omega^2<4|m|c_{H_\varphi}{}^2B/(a^2\Omega^2) \qquad (2{,}1$$

Соответственно максимальный инкремент параметрической раскачи внутри первой зоны Матье есть

$$\gamma_{\max}^{(1)}=\frac{|m|\,c_{H_\varphi}^2}{a^2\Omega}\tilde{h}\,(md_e\varphi(k_z)+1). \qquad (2{,}1$$

Поступи
16 V 19

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Д. Шафранов*, ЖТФ, т. 40, 241 (1970). [2] *Н. А. Бобырев, О. И. Федяни* ЖТФ, т. 33, 1187 (1963). [3] *С. М. Осовец*, ЖЭТФ, т. 29, 238 (1960). [4] *М. Г. Никули* ЖТФ, т. 39, 2144 (1969). [5] *Г. Берге*, Ядерный синтез, т. 12, 99 (1972). [6] *В. П. Сид ров, Т. Р. Солдатенков*, Ядерный синтез, т. 12, 73 (1972). [7] *Э. Т. Уиттекер, Г. Н. Ва сон*, Курс современного анализа, ч. II, М., 1963. [8] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митр польский*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1958.