Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 2

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

У. ТАШМЕТОВ

О СВЯЗНОСТИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 VII 1973)

Войдыславский ([2]) и Кэлли ([3]) показали, что для всякого связного и локально связного метризуемого компакта X гиперпространство $\mathrm{Comp}\,X$, состоящее из всех его непустых компактных подпространств, и гиперпространств $\mathrm{Cont}\,X$, состоящее из всех непустых связных и компактных подпространств (пространства X), являются абсолютными ретрактами.

Здесь этот результат распространяется на произвольные полные метрические пространства, причем так же, как в ([2, 3]), в обоих случаях условие связности вместе с локальной связностью не только достаточно, но и необходимо (теорема 6).

Аналогичный результат верен и для произвольных метризуемых пространств X, но связность нужно заменить на линейную связность, а локальную связность — соответственно на локальную линейную связность (теорема 5).

Если же отказаться и от метризуемости пространства X, то все же можно показать, что $\mathrm{Comp}\,X$ и $\mathrm{Cont}\,X$ и многие другие гиперпространства будут связными и локально связными во всех размерностях $\geqslant 1$ (теорема 1).

На самом деле, для всех рассматриваемых гиперпространств выполнено одно более сильное свойство (теорема 1′ и 1″), из которого вытекает небольшое ослабление условия известной теоремы Лефшеца — Дугунджи ([5]), характеризующей абсолютные окрестностные ретракты класса M всех метризуемых пространств (теорема 2).

Исследован также и «окрестностный» случай: сохраняя лишь надлежащие локальные свойства, мы получаем условия, при которых гиперпространства $\mathrm{Comp}\,X$ и $\mathrm{Cont}\,X$ являются абсолютными окрестностными ретрактами класса M.

Определим и обозначим основные интересующие нас гиперпространства. $\mathrm{Set}\,X$ — семейство всех непустых множеств пространства X *, $\mathrm{Conn}\,X$ — семейство всех непустых связных подпространств пространства X, $\mathrm{Comp}\,X$ — семейство всех непустых компактных подпространств пространства X, $\mathrm{Cont}\,X$ — семейство всех непустых связных компактных подпространств пространства X, $\mathrm{Exp}\,X$ — семейство всех непустых замкнутых множеств пространства X. Все эти пространства, а также и их подпространства мы рассматриваем с известной топологией Виеториса ([4]).

Теорема 1. *Всякое из следующих гиперпространств* $Z=\mathrm{Set}\,X$, $\mathrm{Conn}\,X$, $\mathrm{Comp}\,X$, $\mathrm{Cont}\,X$ *(для произвольного пространства X) и* $Z=\mathrm{Exp}\,X$, $\mathrm{Exp}\,X\cap\mathrm{Conn}\,X$, $\mathrm{Exp}\,X\cap\mathrm{Comp}\,X$, $\mathrm{Exp}\,X\cap\mathrm{Cont}\,X$ *(для регулярного пространства X) связно и локально связно во всех размерностях* $\geqslant 1$.

Теорема 1′. *В тех же предположениях во всяком таком гиперпространстве Z существует база открытых множеств O, включающая и Z, удовлетворяющая условию* C′:

---

* Под пространством всегда понимаем топологическое пространство, под отображением — непрерывное отображение, под продолжением — непрерывное продолжение.

Всякое отображение $f\colon S^n\to Z$ при любом $n\geqslant1$ имеет такое продолжение $F\colon Q^{n+1}\to Z$ на шар Q^{n+1}, ограниченный сферой S^n, что для любого множества O из этой базы $F(Q^{n+1})\subset O$, как только $f(S^n)\subset O$.

Лемма. *Условие* C′, *накладываемое на пространство* Z *и его базу* $\{O\}$, *эквивалентно следующему условию* C″:

Всякое отображение $f\colon V\to Z$, где V — объединение некоторых граней симплекса T^n при всяком $n\geqslant2$, включающее все его ребра, имеет такое продолжение $F\colon T^n\to Z$, что для любого множества O этой базы $F(T^n)\subset O$, как только $f(V)\subset O$.

Теорема 1″ получается из теоремы 1′ заменой условия C′ на условие C″.

Теорема 2. *В предположениях теоремы* 1 *всякое из рассмотренных в ней гиперпространств* Z *обладает следующим свойством* LD″:

*Для всякого открытого покрытия γ пространства Z существует такое открытое покрытие ω, вписанное в γ, что для всякого политопа W * и всякого его подполитопа V, содержащего все ребра политопа W, всякую частичную ω-реализацию ** $f\colon V\to Z$ можно продолжить в полную γ-реализацию $F\colon W\to Z$.*

Если в условии LD″ слово «ребра» заменить на слово «вершины», то мы получим условие Лефшеца — Дугунджи из известной теоремы ([5]), характеризующей абсолютные окрестностные ретракты в классе M метризуемых пространств.

Теорему 2″ получим, если свойство LD″ заменим на следующее свойство D″:

Для всякого политопа W и всякого его подполитопа V, содержащего все ребра политопа W, всякое отображение $f\colon V\to Z$ можно продолжить в отображение $F\colon W\to Z$.

Из теоремы 2 и 2″ получается

Теорема 3. *Для метризуемого пространства X следующие условия эквивалентны*:

а) Comp X (Cont X) *локально линейно связно* (*линейно связно и локально линейно связно*),

б) Comp X (Cont X) *есть* ANR(M) *** (AR(M)).

Теорема 4. *Если метризуемое пространство X локально линейно связно* (*линейно связно и локально линейно связно*), *то* Comp X *и* Cont X *также будут локально линейно связными* (*линейно связными и локально линейно связными*).

В силу одной теоремы Борсука случай гиперпространства Cont X проще: оно будет линейно связным, если линейно связно X (в тех же предположениях). Формулировки нескольких лемм, необходимых для доказательства этой теоремы, мы опустим, так как они довольно «технические». Впрочем, следует заметить, что в предположениях теоремы 4 всякие два компакта, «расположенные достаточно близко друг от друга» в первом случае и соответственно произвольные два компакта — во втором, можно соединить дугой, «состоящей» из конечных множеств (исключая концы), Из всего этого получается решение одной проблемы Борсука (([1]), IX, (4.1)):

Теорема 5. *Если метризуемое пространство X локально линейно связно* (*линейно связно и локально линейно связно*), *тем более, если оно локально стягиваемо* (*стягиваемо и локально стягиваемо*), *тем более, если оно является* ANR(M) (AR(M)), *то* Comp X *и* Cont X *будут* ANR(M) (AR(M)).

---

* Мы рассматриваем политопы только с топологией Уайтхеда.

** Отображение $f\colon V\to Z$ называют частичной ω-реализацией, если система $f(T\cap V)$, где T – произвольный замкнутый симплекс политопа W, вписана в покрытие ω; полную реализацию получим, если положим $V=W$.

*** Как всегда через ANR(M) (AR(M)) обозначают абсолютные окрестностные ретракты (абсолютные ретракты) класса M всех метризуемых пространств.

Наконец, необходимые и достаточные условия дает

Теорема 6. *Если метризуемое пространство X полно, то следующие условия эквивалентны*:

а) *X локально связно (связно и локально связно)*;

б) Comp X *локально связно (связно и локально связно)* *;

в) Cont X *локально связно (связно и локально связно)*;

г) Comp X есть ANR(M) (AR(M));

д) Cont X *есть* ANR(M) (AR(M)).

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Ю. М. Смирнову за помощь и внимание к данной работе.

Ташкентский государственный
педагогический институт
им. Низами

Поступило
26 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *К. Борсук*, Теория ретрактов, М., 1971. [2] *M. Woidyslawski*, Fund. Math., v. 32, 184 (1930). [3] *J. L. Kelly*, Trans. Am. Math. Soc., v. 52, 22 (1942). [4] *К. Куратовский*, Топология, т. 1, М., 1966. [5] *J. Dugundji*, Comp. Math., v. 13, 229 (1958). [6] *E. Michael*, Trans. Am. Math. Soc., v. 71, 152 (1951).

* Эквивалентность условий а) и б) доказана Майклом ([6]).