Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 517.949.22 *МАТЕМАТИКА*

П. Г. АЙЗЕНГЕНДЛЕР, А. Ф. АЛЕКСЕЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 2 VII 1973)

1. Задача об устойчивости нулевого решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом изучалась при различных предположениях многими авторами. Отметим важные результаты, полученные в работах Н. Н. Красовского, С. Н. Шиманова и Э. Б. Лебедевой (см. ([1-4])). В настоящей заметке рассматривается вещественное дифференциальное уравнение с 2π-периодическими по t коэффициентами и постоянным отклонением τ, $\tau>0$:

$$\dot{x}(t)=[A+F_1(t,\varepsilon)]x(t)+[B+F_2(t,\varepsilon)]x(t-\tau)+\omega(t,\varepsilon,x(t),x(t-\tau)),\quad (1)$$

где ε — малый параметр, A и B — постоянные $(n\times n)$-матрицы. Предполагаются выполненными следующие условия:

1) Матрицы F_i, $i=1, 2$, непрерывны по $(t,\varepsilon)\in\Gamma=(-\infty,+\infty)\times[0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0>0$, и представимы в виде

$$F_i(t,\varepsilon)=\sum_{r=1}^{k}F_{ir}(t)\varepsilon^r+\tilde{F}_i(t,\varepsilon),$$

где $\|\tilde{F}_i(t,\varepsilon)\|=o(\varepsilon^k)$ при $\varepsilon\to 0$ (равномерно по t).

2) Функция ω непрерывна на $\Gamma\times Q\times Q$ (Q — окрестность нуля пространства R^n) и $\|\omega(t,\varepsilon,x_1,x_2)\|=o(\|x_1\|+\|x_2\|)$ при $\|x_1\|+\|x_2\|\to 0$ (равномерно по t и при каждом фиксированном ε). Изучается задача об устойчивости (при $t\to+\infty$) нулевого решения уравнения (1) для малых $\varepsilon>0$. При этом рассматривается общий случай, когда характеристический квазиполином $\det\mathscr{D}(\lambda)$, $\mathscr{D}(\lambda)=A+B\exp(-\tau\lambda)-E\lambda$, имеет кратные нули с нулевой вещественной частью. Для решения указанной задачи используются описанные ниже канонические наборы, метод вспомогательных систем С. Н. Шиманова и метод диаграммы Ньютона.

2. Рассмотрим линейное уравнение

$$\dot{x}(t)=[A+F_1]x(t)+[B+F_2]x(t-\tau)\qquad (2)$$

и дадим следующее

Определение. Мультипликатор $\rho(\varepsilon)$ уравнения (2) назовем **мультипликатором устойчивого (неустойчивого) типа**, если на некотором интервале $(0,\varepsilon')$ $|\rho(\varepsilon)|<1$ $(|\rho(\varepsilon)|>1)$.

Известно, что каждому нулю λ характеристического квазиполинома * отвечает единственный мультипликатор, и он представим в виде $\rho_\lambda(\varepsilon)=\exp 2\pi\lambda+\sigma_\lambda(\varepsilon)$, где σ_λ непрерывна по ε и $\sigma_\lambda(0)=0$. Отсюда следует, что нулю λ с $\operatorname{Re}\lambda>0$ $(\operatorname{Re}\lambda<0)$ отвечает мультипликатор неустойчивого (устойчивого) типа. Из результатов ([1-3]) следует, что если все мультипликаторы уравнения (2) являются мультипликаторами устойчивого типа, то для малых $\varepsilon>0$ нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво, а

* Кратный нуль считается столько раз, какова его кратность.

если хотя бы один является мультипликатором неустойчивого типа, то для малых $\varepsilon>0$ нулевое решение указанного уравнения неустойчиво. Ввиду этого достаточно рассмотреть случай, когда $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$ для всех λ и исследовать лишь ρ, отвечающие нулям λ с нулевой вещественной частью. Мы ограничимся исследованием ρ, отвечающих резонансным нулям, т. е. нулям вида iN, где N — целое число. Случай нерезонансных нулей легко сводится к рассматриваемому.

3. Пусть λ — нуль характеристического квазиполинома, φ — отвечающий ему собственный вектор матрицы $\mathscr{D}(\lambda)$ и $\tau_1=\tau/(2\pi)$. Будем говорить, что вектору φ отвечает обобщенная цепочка длины $(r+1)$, если разрешимы уравнения

$$\mathscr{D}(\lambda)\varphi=0,\quad \mathscr{D}(\lambda)\varphi_1=\tau_1 Be^{-\tau\lambda}\varphi+\frac{1}{2\pi}\varphi,$$

$$\mathscr{D}(\lambda)\varphi_2=\left[-\frac{\tau_1(\tau_1+1)}{2!}B\varphi+\tau_1 B\varphi_1\right]e^{-\tau\lambda}-\frac{1}{4\pi}\varphi+\frac{1}{2\pi}\varphi_1,\ldots,$$

$$\mathscr{D}(\lambda)\varphi_r=\left[(-1)^{r-1}\frac{\tau_1\ldots(\tau_1+r-1)}{r!}B\varphi+\ldots+\tau_1 B\varphi_{r-1}\right]e^{-\tau\lambda}+$$

$$+\frac{(-1)^{r-1}\varphi}{2\pi r}+\ldots+\frac{1}{2\pi}\varphi_{r-1}$$

и неразрешимо уравнение

$$\mathscr{D}(\lambda)\varphi_{r+1}=\Phi,$$

$$\Phi=\frac{(-1)^r}{(r+1)!}\tau_1(\tau_1+1)\ldots(\tau_1+r)B\varphi e^{-\tau\lambda}+\ldots+\frac{1}{2\pi}\varphi_r.$$

При этом вектор Φ назовем финальным вектором.

Пусть l_λ — кратность нуля λ и $m_\lambda=\operatorname{def}\mathscr{D}(\lambda)$. Систему из m_λ обобщенных цепочек назовем полным каноническим набором (п.к.н.) для λ, если сумма их длин равна l_λ и $\det((\Phi_i,\psi_j))_{i,j=1}^{m_\lambda}\neq 0$, где $\psi_1,\ldots,\psi_{m_\lambda}$ — система линейно-независимых решений сопряженного уравнения $\mathscr{D}^*(\lambda)\psi=0$. Оказывается, что для каждого резонансного нуля λ существует п.к.н. Более того, п.к.н. и векторы ψ можно выбрать такими, чтобы $(\Phi_i,\psi_j)=\delta_{ij}$. Построение п.к.н. осуществляется по той же схеме, что и построение части жорданова базиса для матрицы $\mathscr{D}(\lambda)$, отвечающей S_λ, где S_λ — корневое подпространство матрицы $\mathscr{D}(\lambda)$ для собственного значения 0. Отличие лишь в том, что вместо жордановых цепочек берутся обобщенные.

4. Пусть l — сумма кратностей всех резонансных нулей квазиполинома, m — размерность подпространства всех 2π-периодических решений уравнения

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau),\tag{3}$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ — совокупность всех резонансных нулей (при этом $\lambda_1=\ldots=\lambda_{m_{\lambda_1}}$ и т. д.). $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ — совокупность всех линейно-независимых собственных векторов матриц $\mathscr{D}(\lambda_i)$, участвовавших в образовании п.к.н., Φ_i — финальный вектор для φ_i, $\psi_1(t),\ldots,\psi_m(t)$ — система линейно-независимых 2π-периодических решений уравнения, сопряженного с (3). Составим вспомогательное интегродифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t)=(A+F_1)y(t)+(B+F_2)(1+\sigma)^{-\tau_1}y(t-\tau)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\ln(1+\sigma)y(t)+\sum_{i=1}^{m}W_i\Phi_i e^{\lambda_i t},\tag{4}$$

в котором

$$\operatorname{colon}\{W_i\}_1^m = -d^{-1} \operatorname{colon}\left\{\int_0^{2\pi} (F(t, \varepsilon, y(t), y(t-\tau)), \psi_k(t))\, dt\right\}_1^m,$$

d^{-1} — матрица, обратная для (d_{ki}),

$$d_{ki} = \int_0^{2\pi} (\Phi_i e^{\lambda_i t}, \psi_k(t))\, dt,$$

$$F = \left(F_1 - \frac{E}{2\pi}\ln(1+\sigma)\right) y(t) + ((1+\sigma)^{-\tau_1}(F_2+B) - B)\, y(t-\tau).$$

Каждому вектору $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ с малой нормой отвечает 2π-периодическое решение уравнения (4), аналитически зависящее от σ и представимое в виде $y = y_1(t, \alpha, \varepsilon, \sigma) + y_2(t, \alpha, \varepsilon, \sigma)$, где

$$y_1 = \alpha_1\varphi_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + \alpha_m \varphi_m e^{\lambda_m t} + \sum_{i\geqslant 0,\ j\leqslant k,\ i+j>0} y_{ij}(t, \alpha)\sigma^i\varepsilon^j, \quad y_2 = o(\varepsilon^k)$$

(равномерно по t и при каждом фиксированном (α, σ) из некоторой окрестности нуля). При этом $W_i = W_i' + W_i''$, где

$$W_i' = \sum_{s=1}^m \sum_{\substack{j\geqslant 0,\ r\leqslant k,\\ j+r>0}} W_{si}^{(j,r)} \sigma^j \varepsilon^r \alpha_s, \quad W_i'' = \sum_{s=1}^m \tilde{W}_{si}(\sigma, \varepsilon)\alpha_s, \quad \tilde{W}_{si} = o(\varepsilon^k)$$

(при каждом фиксированном σ из некоторой окрестности точки $\sigma = 0$). Отметим еще, что $W_{si}^{(j,r)}$ определяются из условия 2π-периодичности для решений рекуррентной системы, получаемой подстановкой y_1 и W_i' в уравнение (4) (в котором F_i заменены соответственно многочленами $\sum_{r=1}^k F_{ir}(t)\varepsilon^r$) и сравнения коэффициентов при одинаковых одночленах $\sigma^j\varepsilon^r$.

5. Рассмотрим уравнения

$$f(\sigma, \varepsilon) \equiv \det\left(\sum_{\substack{j\geqslant 0,\ r\leqslant k,\\ j+r>0}} W_{si}^{(j,r)}\sigma^j\varepsilon^r + \tilde{W}_{si}(\sigma, \varepsilon)\right)_{s,i=1}^m = 0, \tag{5}$$

$$\det\left(\sum_{j\geqslant 0,\ r\leqslant k,\ j+r>0} W_{si}^{(j,r)}\sigma^j\varepsilon^r\right)_{s,i=1}^m = 0. \tag{6}$$

Отметим, что уравнение (6) можно представить в виде

$$\sigma^l + \sum_{\substack{i+r\geqslant 1,\\ (i,r)\neq(l,0)}} L_{ir}\sigma^i\varepsilon^r = 0, \tag{6'}$$

где коэффициенты L_{ir} легко определяются, если воспользоваться свойством дистрибутивности определителя в левой части (6).

Справедливо следующее предложение.

Лемма 1. *Для того чтобы* $\rho(\varepsilon) = 1 + \sigma(\varepsilon)$, $\sigma(0) = 0$, *являлось мультипликатором уравнения* (2), *необходимо и достаточно, чтобы* $\sigma(\varepsilon)$ *было малым решением* [5] *уравнения* (5).

Из леммы 1 следует, что поставленная задача сводится к нахождению всех малых решений уравнения (5), определенных в некоторой правой полуокрестности точки $\varepsilon = 0$. Так как $\operatorname{ord} f(\sigma, 0) = l$, то число всех малых решений уравнения (5) (с учетом их кратностей) равно l. Методом диаграммы Ньютона [5], применяемым к (6′), получаются асимптотические формулы для малых решений уравнения (5) (см. ([6])). В частности, справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть $k \geqslant l-m+1$ и по крайней мере один из коэффициентов $L_{0,\ m+i}$, $i=0, \ldots, k-1$, отличен от нуля.*

Тогда каждое малое решение уравнения (5) *представляется в виде*

$$\sigma(\varepsilon)=\bar{\sigma}\varepsilon^{r/s}+\theta(\varepsilon), \quad (r, s)=1, \quad \bar{\sigma}\neq 0, \tag{7}$$

где r/s — наклон соответствующего звена убывающей части диаграммы Ньютона для (6′), *$\bar{\sigma}$ — корень определяющего уравнения для этого звена (см.* ([5])), *$\theta(\varepsilon)$ — непрерывная функция в некоторой правой полуокрестности нуля и $\theta(\varepsilon)=o(\varepsilon^{r/s})$ при $\varepsilon\to 0$. При этом под $\varepsilon^{1/s}$ понимается арифметическое значение корня.*

Из (7) следует, что каждому корню $\bar{\sigma}$ с $\operatorname{Re}\bar{\sigma}<0$ ($\operatorname{Re}\bar{\sigma}>0$) отвечает мультипликатор устойчивого (неустойчивого) типа. Для исследования мультипликаторов, отвечающих корням $\bar{\sigma}$ с $\operatorname{Re}\bar{\sigma}=0$, нужно получить для $\sigma(\varepsilon)$ асимптотические приближения более высокого порядка.

6. Указанный метод исследования и соображения из п. 2 приводят к различным достаточным признакам как неустойчивости, так и асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1). Приведем два таких признака, предполагая при этом, что оба условия леммы 2 выполнены.

Теорема 1. *Пусть хотя бы для одного звена убывающей части диаграммы Ньютона число $s>2$.*

Тогда для малых $\varepsilon>0$ нулевое решение уравнения (1) *неустойчиво.*

Теорема 2. *Пусть $L_{0,\ m+i}=0$, $i=0, \ldots, p-1$, $p\geqslant 1$, $L_{0,\ m+p}\neq 0$ и $l>2(m+p)$.*

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

В заключение приведем иллюстрирующий пример.

Рассмотрим уравнение (1), в котором

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 5\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad F_{11}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos^2 t & 0\end{bmatrix},\quad F_{21}=\begin{bmatrix}\sin^2 t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$k=2$, $\tau>0$, $\tau\neq 1$. Для указанного уравнения $\lambda=0$ является трехкратным нулем характеристического квазиполинома, а остальные нули имеют отрицательные вещественные части, $l=3$, $m=2$ и уравнение (6′) имеет вид

$$\sigma^3-\frac{8\pi^2(1+\tau)}{1-\tau}\sigma\varepsilon+\frac{8\pi^3}{1-\tau}\varepsilon^2+\ldots=0. \tag{8}$$

Оба условия леммы 2 выполнены. Убывающая часть диаграммы для (8) состоит из двух звеньев и корнями определяющих уравнений для звеньев являются $\pi/(1+\tau)$, $\pm 2\pi[2(\tau+1)/(1-\tau)]^{1/2}$. Так как по крайней мере один корень положительный, то для малых $\varepsilon>0$ нулевое решение рассматриваемого уравнения неустойчиво.

Псковский государственный педагогический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
20 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Н. Красовский*, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959. [2] *С. Н. Шиманов*, ПММ, т. 24, в. 1, 55 (1960). [3] *С. Н. Шиманов*, ПММ, т. 25, в. 6, 992 (1961). [4] *Э. Б. Лебедева, С. Н. Шиманов*, Дифференциальные уравнения, т. 4, № 9, 1598 (1968). [5] *М. М. Вайнберг, В. А. Треногин*, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969. [6] *П. Г. Айзенгендлер*, Изв. высш. учебн. завед. Математика, № 7, 3 (1971).