Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 517.862:517.543 *МАТЕМАТИКА*

Б. Н. АПАНАСОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КЛЕЙНОВЫХ ГРУПП В R^n

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 3 VII 1973)

1. Известно, что всякая конечно-порожденная клейнова (разрывная) группа Г конформных автоморфизмов R^2 имеет фундаментальную область, ограниченную конечным числом попарно эквивалентных сторон (и наоборот). Но уже для $n=3$ доказано ([3], [4]) существование конечно-порожденных клейновых групп, у которых изометрические фундаментальные полиэдры ([1]) имеют счетное множество сторон. Поэтому важной является задача о нахождении условий на клейнову группу в R^n, $n\geqslant 3$, обеспечивающих конечность числа сторон у фундаментальных областей этих групп. Это связано и с вопросом о мере предельного множества клейновой группы (см. ([1])). В настоящей работе выделяется довольно широкий класс таких групп.

Заметим также, что упомянутые выше доказательства ([3], [4]) носят неконструктивный характер. В данной работе строятся циклические группы, изометрические фундаментальные полиэдры которых имеют счетное число граней.

2. Пусть T — конформный автоморфизм R^n, $T(\infty)\neq\infty$. Обозначим через I_T его изометрическую сферу $\{x\colon |T'(x)|=1\}$ (см. ([1])), через q_T и r_T — соответственно ее центр и радиус. В ([2]) доказано, что T можно представить в виде $T=U\circ O\circ J$, где J — инверсия относительно сферы I_T, O — отражение относительно гиперплоскости L_T, по отношению к которой I_T и $I_{T^{-1}}$ симметричны, U — вращение вокруг $q_{T^{-1}}$. Используя это представление, автор в ([2]) предложил классификацию конформных (мёбиусовых) отображений R^n, основанную на свойствах множеств их неподвижных точек, которая при $n=2$ совпадает с хорошо известной классификацией дробно-линейных отображений плоскости.

Отображение $T=U\circ O\circ J$ называется:

1) гиперболическим, если $U=1$ (т. е. является тождественным) и $I_T\cap I_{T^{-1}}=\varnothing$;

2) гиперболическим с кручением, если $U\neq 1$, $I_T\cap I_{T^{-1}}=\varnothing$ и существует точка x_0, $x_0\neq q_T$, ∞ такая, что $U(x_0)=x_0$;

3) гиперболоксодромическим, если $I_T\cap I_{T^{-1}}=\varnothing$ и для любой конечной точки x, $x\neq q_{T^{-1}}$, $U(x)\neq x$;

4) параболическим, если $U=1$, $I_T\cap I_{T^{-1}}=\{\bar{x}\}$;

5) параболическим с кручением, если $U\neq 1$, $I_T\cap I_{T^{-1}}=\{\bar{x}\}$ и $U(\bar{x})=\bar{x}$;

6) параболоксодромическим, если $I_T\cap I_{T^{-1}}=\{\bar{x}\}$ и $U(\bar{x})\neq\bar{x}$;

7) эллиптическим рода k, $0\leqslant k\leqslant n-2$, если $I_T\cap I_{T^{-1}}=M$ — $(n-2)$-мерная сфера и U оставляет неподвижными все точки $(k+1)$-мерной плоскости $L_U\subseteq L_T$, пересекающейся с M более чем в одной точке;

8) эллиптиколоксодромическим, если $I_T\cap I_{T^{-1}}=M$ — $(n-2)$-мерная сфера и $U(x)\neq x$ для любой точки $x\in M$;

9) вырожденно эллиптическим, если $I_T\cap I_{T^{-1}}=M$ и существует единственная точка $p\in M$ такая, что $U(p)=p$.

3. Пусть T — вырожденно эллиптическое отображение R^n. Рассмотрим конформный автоморфизм W пространства R^n такой, что $W(p)=\infty$. Положим $\tilde{T}=W\circ T\circ W^{-1}$, $\tilde{U}=W\circ U\circ W^{-1}$, $\tilde{V}=W\circ O\circ J\circ W^{-1}$, где $\tilde{V}$ — вращение вокруг $(n-2)$-мерной плоскости $W(M)$, $\tilde{U}$ — вращение вокруг k-мерной плоскости $W(N)$, где $N=\{x\in R^n\colon U(x)=x\}$, причем $W(M)\cap W(N)$ содер-

жит только бесконечно удаленную точку. Без ограничения общности можно считать, что $W(M)$ содержит начало координат. Тогда $\tilde{U}(y)=\tilde{U}_0(y-y_0)+y_0$, где $\tilde{U}_0$ — ортогональное преобразование, а $y_0\neq 0$. Отсюда получаем, что

$$\tilde{T}(y)=S(y)+b, \tag{1}$$

где $b\neq 0$, $S(y)$ — вращение вокруг некоторого подпространства $R^m\subset R^n$, причем вектор $b\in R^m$ и не ортогонален R^m.

Из (1) следует, что $\Gamma=\{T^n\colon n\in Z\}$ является разрывной группой в R^n с единственной предельной точкой $p\in M$.

Будем называть вырожденно эллиптическое отображение T отображением первого типа, если в представлении (1) S — поворот на угол, кратный 2π, и второго типа в противном случае.

Множество $Q=\{q_{T^n},\ n\in Z,\ n\neq 0\}$ центров изометрических сфер элементов группы Γ состоит из точек, эквивалентных бесконечности. Следовательно,

$$Q=\{T^n(q_T),\ n\in Z\}. \tag{2}$$

Так как при любом n точка $p\in I_{T^n}$, то вектор $m_{T^n}=(p-q_{T^n})/|p-q_{T^n}|$ является единичной нормалью сферы I_{T^n} в точке p. Переходя к отображениям $\tilde{T}^n=WT^nW^{-1}$, получим, используя (2), что векторы m_{T^n} образуют с некоторым вектором d угол θ, причем $0<\theta<\pi/2$. Отсюда следует

Теорема 1. *Изометрический фундаментальный полиэдр группы* Γ, *порожденной вырожденно эллиптическим отображением второго типа, имеет бесконечное множество попарно эквивалентных граней.*

4. Неподвижные точки конформного автоморфизма T лежат на его изометрической сфере в том и только в том случае, когда T — отображение одного из следующих классов: параболическое, параболическое с кручением, эллиптическое или вырожденно эллиптическое (см. ([2])). Для таких отображений имеет место

Теорема 2. *Пусть все элементы клейновой группы* Γ *таковы, что их неподвижные точки лежат на их изометрических сферах и пусть группа* Γ *не содержит вырожденно эллиптических отображений второго типа.*

Тогда изометрический фундаментальный полиэдр группы Γ *имеет конечное число сторон.*

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы, обобщающие известные утверждения для плоского случая.

Лемма 1. *Пусть* Γ *— клейнова группа в* R^n.

Тогда множество $\Phi_k=\{T\in\Gamma\colon r_T\geqslant k\}$ *конечно для любого* $k>0$.

Лемма 2. *Клейнова группа в* R^n, *состоящая только из эллиптических элементов, конечна.*

Лемма 3. *Если клейнова группа в* R^n *состоит из параболических, параболических с кручением или вырожденно эллиптических элементов, то существует общая неподвижная точка для всей группы.*

Лемма 4. *Пусть все элементы клейновой группы* Γ *таковы, что их неподвижные точки лежат на их изометрических сферах. Если при этом существует общая неподвижная точка* $x_0\in R^n$ *для группы* Γ, *то* x_0 *единственная предельная точка группы* Γ.

Лемма 5. *Если граница фундаментального полиэдра клейновой группы* Γ *состоит из обыкновенных и параболических точек* ([5]), *то фундаментальная область имеет конечное число сторон.*

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. Л. Крушкалю за постановку задачи и внимание к работе и П. П. Белинскому за советы и замечания.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
6 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *L. V. Ahlfors*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 55, № 2, 252 (1966). [2] *Б. Н. Апанасов*, В сборн. Метрические вопросы теории функций и отображений, т. 5, Киев, 1973. [3] *L. Greenberg*, Ann. Math., v. 84, № 3, 433 (1966). [4] *С. Л. Крушкаль*, ДАН, т. 211, № 1 (1973). [5] *Л. Р. Форд*, Автоморфные функции, М.– Л., 1936.