Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

Н. Л. ВАСИЛЕВСКИЙ

К ТЕОРИИ НЁТЕРА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОЛЯРНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 17 VII 1973)

1. В пространстве $L_p(\mathscr{L})$ $p>1$, изучается оператор

$$A=aJ+bN+cS+dP+T,$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ — кусочно-непрерывные на контуре $\mathscr{L}$ функции, T — вполне непрерывный оператор,

$$N\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)\ln(\tau-t)},\quad S\varphi=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t},\quad P\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t-1},$$

$\mathscr{L}$: $t=x(s)+iy(s)$ — выпуклый замкнутый контур Ляпунова, не имеющий прямолинейных частей.

Свойства оператора A при $b(t)\equiv d(t)\equiv 0$ хорошо известны [1-3]. В случае, когда $d(t)\equiv 0$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — непрерывные на контуре $\mathscr{L}$ функции и контур $\mathscr{L}$ удовлетворяет условию *

$$\sup_{t_1,\,t_2\in\mathscr{L}}|t_1-t_2|<1,$$

оператор A изучен в работе автора [4].

В настоящей работе для исследования оператора A применен новый метод, позволивший рассмотреть оператор A с кусочно-непрерывными коэффициентами и, кроме того, снять указанные выше ограничения на размер контура $\mathscr{L}$.

2. При $\varphi(t)\in H(\mathscr{L})$ рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-z)\ln(\tau-z)}.$$

Через $t_0=x_0+iy_0$ обозначим точку контура $\mathscr{L}$ такую, что

$$y_0=\inf_{x+iy\in\mathscr{L}}\{y(s)\}.$$

Точку t_0 соединим с бесконечно удаленной точкой полупрямой Γ так, чтобы эта полупрямая в точке t_0 не касалась контура $\mathscr{L}$. Будем считать, что функция $\ln(\tau-z)$ переменного τ есть главная ветвь логарифма, непрерывная на $\mathscr{L}$ всюду кроме точки t_0.

Особой линией функции $\Phi(z)$, кроме контура интегрирования $\mathscr{L}$, будет линия C: $\zeta=t(s)-1$. Часть линии $\mathscr{L}$, лежащую внутри C, обозначим $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2=\mathscr{L}\setminus\mathscr{L}_1$. Часть линии C, лежащую внутри $\mathscr{L}$, обозначим C_1, $C_2=C\setminus C_1$. Через α_i, $i=1, 2$, обозначим точки пересечения контуров $\mathscr{L}$ и C, $\beta_i=\alpha_i+1\in\mathscr{L}$, $i=1, 2$.

И. М. Мельником [5] доказана следующая

Теорема 1. *Функция $\Phi(z)$ является кусочно-аналитической функ-*

* Это условие обеспечивает непересечение особых линий функции $\Phi(z)$ (см. ниже).

цией с линиями скачков $\mathscr{L}$, C и Γ. Предельные значения функции $\Phi(z)$ на контурах $\mathscr{L}$ и C даются формулами

$$\Phi^+(t)=\varphi(t)[\omega(t)+1]+\Phi(t), \quad \Phi^-(t)=\varphi(t)+\Phi(t), \quad t\in\mathscr{L}_1;$$

$$\Phi^+(t)=\varphi(t)\omega(t)+\Phi(t), \quad \Phi^-(t)=\Phi(t), \quad t\in\mathscr{L}_2;$$

$$\Phi^+(\zeta)={}^1/{}_2\varphi(\zeta+1)+\varphi(\zeta+1)\omega(\zeta)+\Phi(\zeta),$$

$$\Phi^-(\zeta)=-{}^1/{}_2\varphi(\zeta+1)+\varphi(\zeta+1)\omega(\zeta)+\Phi(\zeta), \quad \zeta\in C_1;$$

$$\Phi^+(\zeta)={}^1/{}_2\varphi(\zeta+1)+\Phi(\zeta), \quad \Phi^-(\zeta)=-{}^1/{}_2\varphi(\zeta+1)+\Phi(\zeta), \quad \zeta\in C_2,$$

где

$$\omega(t)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left[1+\frac{2\pi i}{\ln(t_0-t)}\right].$$

Скачок на линии Γ обусловлен наличием функции $1/\ln(\tau-z)$ в ядре интеграла $\Phi(z)$ и выбором ветви логарифма, однозначной на плоскости с разрезом вдоль Γ.

Зададим на Γ направление от точки t_0 к бесконечности. Тогда для точек $\eta\in\Gamma$

$$\Phi^+(\eta)-\Phi^-(\eta)=\int\limits_{\mathscr{L}}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-\eta)\ln(\tau-\eta)[\ln(\tau-\eta)+2\pi i]}=h(\eta).$$

Лемма 1. *Функция $h(\eta)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки $\eta\in\Gamma$, за исключением точки $\eta=t_0$, $h(t_0)=0$. В окрестности бесконечно удаленной точки*

$$|h(\eta_1)-h(\eta_2)|\leqslant G|1/\eta_1-1/\eta_2|, \quad G=\text{const}.$$

Теорема 2. *Оператор N является линейным ограниченным оператором, действующим в пространстве $L_p(\mathscr{L})$, $p>1$.*

3. Теорема 3. *Оператор P является линейным ограниченным оператором, действующим в пространстве $L_p(\mathscr{L})$, $p>1$.*

Доказательство теоремы вытекает из результатов [6].

Введем сдвиг γ: $\mathscr{L}\to\mathscr{L}$ контура $\mathscr{L}$ на себя, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\gamma(t)$ — непрерывная на контуре $\mathscr{L}$ функция;
2) $\gamma(t)$ меняет ориентацию контура $\mathscr{L}$;
3) $\gamma[\gamma(t)]\equiv t$;
4) $\gamma(\alpha_i)=\beta_i$, $i=1, 2$;
5) в окрестности точек α_i имеют место равенства $\operatorname{Im} t=\operatorname{Im}\gamma(t)$.

Теорема 4. *Если функция $a(t)$ ограничена на контуре $\mathscr{L}$ и непрерывна в достаточно малых окрестностях точек β_i, $i=1, 2$, то оператор $Pa-a(\gamma)P$ вполне непрерывен.*

Теорема 5. *Пусть $a(t)$ — ограниченная на контуре $\mathscr{L}$ функция, тогда оператор PaP вполне непрерывен.*

Теорема 6. $PS\varphi=[2\delta(t)-1]P\varphi$, *где*

$$\delta(t)=\begin{cases}1, & t\in\mathscr{L}_1,\\ 0, & t\in\mathscr{L}_2.\end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть $a(t)$ — ограниченная на контуре $\mathscr{L}$ функция. Оператор $I+aP$ нётеров, индекс его равен нулю.*

Лемма непосредственно вытекает из теоремы 5.

В пространстве $L_p(\mathscr{L})$, $p>1$, рассмотрим оператор

$$R=aJ+bS+cP+T,$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — кусочно-непрерывные на контуре $\mathscr{L}$ функции с точками разрыва, отличными от точек β_i, $i=1, 2$, T — вполне непрерывный оператор.

Теорема 7. *Оператор*

$$R=aJ+bS+cP+T$$

нётеров одновременно с оператором

$$R^0 = aJ + bS$$

и имеет одинаковый с ним индекс *.

Доказательство теоремы основано на следующем из теорем 4 и 6 представлении

$$R = \left(J + \frac{c}{a(\gamma)+b(\gamma)\,(2\delta-1)} P \right) R^0 + T_1,$$

T_1 — вполне непрерывный оператор, справедливом при $a(t\pm0)\pm b(t\pm0)\neq0$, и на свойствах оператора R^0 (см. например, ([3])).

4. При $\varphi(t)\in H(\mathscr{L})$ рассмотрим функцию

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-z)\ln(\tau-z)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\varphi(\zeta+1)\,d\zeta}{\zeta-z} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}} \frac{\omega(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{h(\eta)\,d\eta}{\eta-z}.$$

Функция $W(z)$, как это следует из свойств функций $\Phi(z)$, $h(\eta)$ и свойств интегралов типа Коши ([1], [2]), есть всюду аналитическая на комплексной плоскости функция и $W(\infty)=0$. По теореме Лиувилля $W(z)\equiv0$. Тогда и $W^+(t)\equiv0$. Имеем

$$W^+(t) \equiv \varphi(t)\,\omega(t) + \delta(t)\,\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)\ln(\tau-t)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\varphi(\zeta+1)\,d\zeta}{\zeta-t} -$$

$$-\frac{1}{2}\,\omega(t)\,\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}} \frac{\omega(\tau)\,\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{h(\eta)}{\eta-t} \equiv 0.$$

После необходимых преобразований получим

$$D\varphi = {}^1\!/_2\omega\varphi + \delta\varphi + N\varphi - P\varphi - {}^1\!/_2\omega S\varphi = T'\varphi + T''\varphi,$$

где

$$T'\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{d\eta}{\eta-t} \int\limits_{\mathscr{L}} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-\eta)\ln(\tau-\eta)\,[\ln(\tau-\eta)+2\pi i]},$$

$$T''\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}} \frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\tau-t}\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Равенство $D=T'+T''$ получено для функций $\varphi(t)\in H(\mathscr{L})$. Однако, так как множество $H(\mathscr{L})$ всюду плотно в $L_p(\mathscr{L})$, а операторы D и T'' непрерывны в $L_p(\mathscr{L})$ (а тогда непрерывен в $L_p(\mathscr{L})$ и оператор T'), равенство $D=T'+T''$ будет справедливым и для всех $\varphi\in L_p(\mathscr{L})$, $p>1$.

Теорема 8. *Оператор D вполне непрерывен* **.

Доказательство теоремы основано на следующих утверждениях.

1) Оператор T'' вполне непрерывен.

2) Если в интервале $T'\varphi$ заменить переменные ***: $t=1/w$, $\tau=1/z$,

---

* Иными словами, несмотря на то, что оператор P не является вполне непрерывным, возмущение оператора R^0 оператором cP не нарушает нётеровость оператора R^0 и не меняет его индекс.

** Конструкция оператора D объясняет целесообразность введения в оператор A слагаемого dP.

*** Без ограничения общности можно считать, что точка 0 не лежит на контуре $\mathscr{L}\cup\Gamma$.

$\eta=1/\xi$, то $T'=H^{-1}BCH$, где $H\varphi=\varphi(1/z)$,

$$C\psi=\int\limits_{\mathscr{L}'}\frac{\psi(z)\,dz}{z(z-\xi)\ln(1/z-1/\xi)\,[\ln(1/z-1/\xi)+2\pi i]},\quad Bf=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{wf(\xi)}{\xi-w}\,d\xi,$$

$H^{-1}g=g(1/t)$; через $\mathscr{L}'$ и Γ' обозначены образы кривых $\mathscr{L}$ и Γ при отображениях $w=1/t$ и $\xi=1/\eta$.

3) Операторы H: $L_p(\mathscr{L})\to L_p(\mathscr{L}')$ и H^{-1}: $L_p(\mathscr{L}')\to L_p(\mathscr{L})$ линейны и ограничены.

4) Оператор B есть линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $L_p(\Gamma')$ в $L_p(\mathscr{L}')$.

5) Оператор C есть линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $L_p(\mathscr{L}')$ в $L_p(\Gamma')$.

6) Оператор C вполне непрерывен.

5. В пространстве $L_p(\mathscr{L})$, $p>1$, рассмотрим оператор

$$A=aJ+bN+cS+dP+T,$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ — кусочно-непрерывные на контуре $\mathscr{L}$ функции, точки разрыва которых отличны от точек β_i, $i=1, 2$.

Теорема 9. *Оператор A нётеров тогда и только тогда, когда в пространстве $L_p(\mathscr{L})$, $p>1$, нётеров оператор*

$$A_1=(a-b\delta-{}^1/_2b\omega)J+(c+{}^1/_2b\omega)S.$$

Операторы A и A_1 имеют одинаковые индексы.

Доказательство теоремы вытекает из представления

$$A=A_1+(d+b)P+bD+T$$

и теорем 7 и 8.

Условия нётеровости и формула для индекса операторов типа A_1 хорошо известны (см., например, ([3])). Поэтому теорема 9 позволяет выписать в явном виде условия нётеровости и формулу для индекса оператора A.

6. Применение теоремы 9 к оператору

$$A_0=aJ+bN$$

с непрерывными коэффициентами дает полное решение одной задачи, поставленной Ф. Д. Гаховым (см. ([4])). Как следует из теоремы 9, оператор A_0 будет нётеров тогда и только тогда, когда нётеров оператор

$$\tilde{A}_0=(a-b\delta-{}^1/_2b\omega)J+{}^1/_2b\omega S$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами (точки разрыва $t=\alpha_i$, $i=1, 2$). Индексы операторов A_0 и $\tilde{A}_0$ совпадают.

Таким образом, для оператора A_0, так же как и для оператора с ядром Коши, справедлива теория Нётера.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Г. С. Литвинчуку, под руководством которого была выполнена эта работа.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
9 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. И. Мусхелишвили,* Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. [2] *Ф. Д. Гахов,* Краевые задачи, 1963. [3] *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 35, № 4, 940 (1971). [4] *Н. Л. Василевский,* ДАН, т. 202, № 4, 747 (1972). [5] *И. И. Мельник,* Сборн. Исследования по современным проблемам теории функции комплексного переменного, 1961. [6] *Э. Г. Гордадзе,* Сообщ. АН ГрузССР, т. 37, № 3, 521 (1965).