Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 513.88:513.83

МАТЕМАТИКА

В. И. ДМИТРИЕВ

К ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ КАЛЬДЕРОНА — МИТЯГИНА

(Представлено академиком С. М. Никольским 21 VIII 1973)

Б. С. Митягин в [4] и А. П. Кальдерон в [3] нашли все нормированные пространства, являющиеся интерполяционными (ассоциированными) [1, 3] между (L_1, L_∞) и (L_1, L_∞). Целью настоящей работы является описание всех нормированных интерполяционных пространств между $(\Lambda_\varphi, L_\infty)$ и (L_1, L_∞).

Пусть $\varphi=\varphi(t)$, $t\in[0,\infty)$,— непрерывная строго возрастающая вогнутая функция такая, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(\infty)=\infty$. Если R — множество с σ-конечной мерой μ, то через $L_1=L_1(R,\mu)$, $L_\infty=L_\infty(R,\mu)$, $\Lambda_\varphi=\Lambda_\varphi(R,\mu)$ обозначаются линейные (нормированные) пространства вещественнозначных измеримых функций z на (R,μ), для которых конечны соответственно нормы

$$\|z\|_{L_1}=\int\limits_R |z|\,d\mu,\qquad \|z\|_{L_\infty}=\operatorname*{vrai\,sup}_R|z|,\qquad \|z\|_{\Lambda_\varphi}=\int\limits_0^\infty z^*(s)\,d\varphi(s)$$

(z^* — перестановка функции $|z|$ на полуось $(0,\infty)$ в невозрастающем порядке [2, 3]).

Теорема 1. *Пусть* $x\in\Lambda_\varphi(R_1,\mu_1)+L_\infty(R_1,\mu_1)=S_1$, $y\in L_1(R_2,\mu_2)+L_\infty(R_2,\mu_2)=S_2$.

Для существования линейного оператора T: $S_1\to S_2$ *такого, что*

$$y=Tx,$$

$$\|T\|_{\Lambda_\varphi(R_1,\mu_1)\to L_1(R_2,\mu_2)}\leqslant 1,\qquad \|T\|_{L_\infty(R_1,\mu_1)\to L_\infty(R_2,\mu_2)}\leqslant 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^t y^*(s)\,ds\leqslant\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} x^*(s)\,d\varphi(s)\qquad\text{(K)}$$

при всех $t>0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $y=Tx$, $\|T\|_{\Lambda_\varphi\to L_1}\leqslant1$, $\|T\|_{L_\infty\to L_\infty}\leqslant1$. Если $x=x_0+x_1$, $x_0\in\Lambda_\varphi$, $x_1\in L_\infty$ и $\|x_1\|_{L_\infty}\leqslant\alpha$ $(\alpha>0)$, то существует представление $y=y_0+y_1$ такое, что $\|y_0\|_{L_1}\leqslant\|x_0\|_{\Lambda_\varphi}$, $\|y_1\|_{L_\infty}\leqslant\alpha$, например, $y_0=Tx_0$, $y_1=Tx_1$. Отсюда следует, что при $\alpha>0$

$$\inf_{\substack{\|x_1\|_{L_\infty}\leqslant\alpha\\ x_0+x_1=x}}\|x_0\|_{\Lambda_\varphi}\geqslant\inf_{\substack{\|y_1\|_{L_\infty}\leqslant\alpha\\ y_0+y_1=y}}\|y_0\|_{L_1}.$$

Каждый из этих инфимумов легко вычисляется. Например,

$$\inf_{|x_1|\leqslant\alpha}\int\limits_0^\infty (x-x_1)^*(s)\,d\varphi(s)$$

достигается, очевидно, при $x_1(r_1)=x(r_1)$, когда $|x(r_1)|\leqslant\alpha$, и $x_1(r_1)=\alpha\operatorname{sign}x(r_1)$, когда $|x(r_1)|>\alpha$, $r_1\in R_1$, и равен $\int\limits_0^\infty (x^*(s)-\alpha)^+d\varphi(s)$, где $a^+=\max(a, 0)$. Аналогично, второй инфимум равен $\int\limits_0^\infty (y^*(s)-\alpha)^+ds$. Таким образом,

$$\int\limits_0^\infty (x^*(s)-\alpha)^+d\varphi(s) \geqslant \int\limits_0^\infty (y^*(s)-\alpha)^+ds \geqslant \int\limits_0^t (y^*(s)-\alpha)^+ds \geqslant \int\limits_0^t y^*(s)\,ds-\alpha t$$

при $t>0$. Возьмем теперь $\alpha=x^*(\varphi^{-1}(t))$. Получаем

$$\int\limits_0^\infty (x^*(s)-x^*(\varphi^{-1}(t)))^+d\varphi(s)=\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} (x^*(s)-x^*(\varphi^{-1}(t)))\,d\varphi(s)=$$

$$=\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} x^*(s)\,d\varphi(s)-x^*(\varphi^{-1}(t))\,t \geqslant \int\limits_0^t y^*(s)\,ds-x^*(\varphi^{-1}(t))\,t,$$

и необходимость условия (K) установлена.

Достаточность. Пусть $x\in\Lambda_\varphi+L_\infty$, $y\in L_1+L_\infty$ и выполнено (K).

Сначала рассмотрим случай, когда y — простая неотрицательная функция, $y(r_2)=\sum\limits_{i=1}^n y_i\chi_{e_i}(r_2)$, $y_1\geqslant\ldots\geqslant y_n\geqslant 0$, $\chi_{e_i}(r_2)$ — характеристические функции непересекающихся измеримых множеств $e_i\subset R_2$ конечной μ_2-меры. Пусть $t_0=0$, $t_i=\sum\limits_{j=1}^{i}\mu_2(e_j)$, $i=1,\ldots,n$. Функция $\int\limits_0^t y^*(s)\,ds$ равна 0 в нуле, линейна в интервалах (t_{i-1}, t_i), $i=1,\ldots,n$, и постоянна в интервале (t_n, ∞).

Будем временно считать, что (R_1, μ_1) — это полуось $(0, \infty)$ с мерой m Лебега. Построим оператор $\overline{T}\colon S_1\to S_2$:

$$\overline{T}z=\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_2(e_i)}\int\limits_{\varphi^{-1}(t_{i-1})}^{\varphi^{-1}(t_i)} z(s)\,d\varphi(s)\cdot\chi_{e_i},\quad z\in S_1.$$

При $z\in\Lambda_\varphi$ имеем

$$\|\overline{T}z\|_{L_1}\leqslant\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_2(e_i)}\int\limits_{\varphi^{-1}(t_{i-1})}^{\varphi^{-1}(t_i)} |z(s)|\,d\varphi(s)\cdot\mu_2(e_i)=\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t_n)} |z(s)|\,d\varphi(s)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\infty z^*(s)\,d\varphi(s)=\|z\|_{\Lambda_\varphi}\quad (\text{см. } (^2)).$$

При $z\in L_\infty$ имеем

$$\|\overline{T}z\|_{L_\infty}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{\mu_2(e_i)}\int\limits_{\varphi^{-1}(t_{i-1})}^{\varphi^{-1}(t_i)} |z(s)|\,d\varphi(s)\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{\mu_2(e_i)}\int\limits_{\varphi^{-1}(t_{i-1})}^{\varphi^{-1}(t_i)} d\varphi(s)\cdot\|z\|_{L_\infty}=\|z\|_{L_\infty}$$

(так как $\int\limits_{\varphi^{-1}(t_{i-1})}^{\varphi^{-1}(t_i)} d\varphi(s)=t_i-t_{i-1}=\mu_2(e_i)$).

Кроме того,

$$\overline{T}x^*=\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_2(e_i)}\int\limits_{\varphi^{-1}(t_{i-1})}^{\varphi^{-1}(t_i)} x^*(s)\,d\varphi(s)\cdot\chi_{e_i}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\mu_2(e_i)}\int\limits_{\varphi^{-1}(t_{i-1})}^{\varphi^{-1}(t_i)} x^*(s)\,d\varphi(s)\geqslant x^*(\varphi^{-1}(t_i))\geqslant\frac{1}{\mu_2(e_{i+1})}\int\limits_{\varphi^{-1}(t_i)}^{\varphi^{-1}(t_{i+1})} x^*(s)\,d\varphi(s).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{t_i}(\overline{T}x^*)^*(s)\,ds=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{\mu_2(e_j)}\int\limits_{\varphi^{-1}(t_{j-1})}^{\varphi^{-1}(t_j)} x^*(s)\,d\varphi(s)\cdot\mu_2(e_j)=$$

$$=\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t_i)} x^*(s)\,d\varphi(s)\geqslant\int\limits_0^{t_i} y^*(s)\,ds,$$

а так как функция $\int\limits_0^t(\overline{T}x^*)^*(s)\,ds$ равна 0 в нуле, линейна в промежутках (t_{i-1}, t_i) и постоянна в промежутке (t_n, ∞), то при всех $t>0$

$$\int\limits_0^t(\overline{T}x^*)^*(s)\,ds\geqslant\int\limits_0^t y^*(s)\,ds.$$

Теперь с помощью теоремы Кальдерона (3) можно засвидетельствовать существование линейного оператора $\overline{T}$: $L_1((0,\infty),m)+L_\infty((0,\infty),m)\to$ $\to L_1(R_2,\ \mu_2)+L_\infty(R_2,\ \mu_2)$ такого, что $\overline{\overline{T}}\overline{T}x^*=y$ и $\|\overline{T}\|_{L_1\to L_1}\leqslant 1$, $\|\overline{T}\|_{L_\infty\to L_\infty}\leqslant 1$.

Вернемся к произвольным R_1, μ_1. По той же теореме Кальдерона найдется линейный оператор $\hat{T}$ такой, что

$$\|\hat{T}\|_{L_1(R_1,\mu_1)\to L_1((0,\infty),m)}\leqslant 1,\quad \|\hat{T}\|_{L_\infty(R_1,\mu_1)\to L_\infty((0,\infty),m)}\leqslant 1$$

и $\hat{T}x=x^*$.

Так как пространства $\Lambda_\varphi(R_1,\ \mu_1)$ и $\Lambda_\varphi((0,\ \infty),\ m)$ точно ассоциированы ([3]) относительно пар $(L_1(R_1,\ \mu_1),\ L_\infty(R_1,\ \mu_1))$ и $(L_1((0,\ \infty),\ m),\ L_\infty((0,\ \infty),m))$, то

$$\|\hat{T}\|_{\Lambda_\varphi(R_1,\mu_1)\to\Lambda_\varphi((0,\infty),m)}\leqslant 1.$$

В силу всего сказанного, линейный оператор $T=\overline{\overline{T}}\overline{T}\hat{T}$ обладает теми свойствами, что $\|T\|_{\Lambda_\varphi\to L_1}\leqslant 1$, $\|T\|_{L_\infty\to L_\infty}\leqslant 1$ и $Tx=y$.

Пусть теперь (K) выполнено с неотрицательной функцией y из S_2. Пусть $0\leqslant y_n\in S_2$, y_n — простые функции, $y_n\uparrow y$ почти всюду. Поскольку

$$\int\limits_0^t y_n^*(s)\,ds\leqslant\int\limits_0^t y^*(s)\,ds\leqslant\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} x^*(s)\,d\varphi(s),$$

то по уже доказанному существуют линейные операторы T_n, которые удовлетворяют неравенствам $\|T_n\|_{\Lambda_\varphi\to L_1}\leqslant 1$, $\|T_n\|_{L_\infty\to L_\infty}\leqslant 1$ и таковы, что $T_nx=y_n$.

Рассмотрим на $L_1(R_2,\ \mu_2)+L_\infty(R_2,\ \mu_2)$ слабую топологию $\sigma(L_1+L_\infty,\ \Gamma)$, где Γ — пространство всех ограниченных измеримых функций на R_2 с носителем конечной μ_2-меры (двойственность обычная: $\langle z,\ z'\rangle=\int\limits_{R_2} z\cdot z'\,d\mu_2$).

Легко видеть, во-первых, что единичные шары пространств L_1 и L_∞ оказываются замкнутыми в этой топологии в L_1+L_∞; во-вторых, $L_\infty(R_1,\ \mu_1)$ плотно в $\Lambda_\varphi(R_1,\ \mu_1)+L_\infty(R_1,\ \mu_1)$; в-третьих, единичный шар пространства $L_\infty(R_2,\ \mu_2)$ компактен в топологии $\sigma(L_1+L_\infty,\ \Gamma)$ (даже в топологии $\sigma(L_\infty,$