Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 517.53+513.881 *МАТЕМАТИКА*

М. М. ДРАГИЛЕВ, В. П. ЗАХАРЮТА, Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

ДВОЙСТВЕННАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ВОПРОСАМИ ТЕОРИИ БАЗИСА И ИНТЕРПОЛЯЦИИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 12 X 1973)

1°. В теории функций комплексного переменного, в частности, в вопросах базиса, полноты и интерполяции важное значение имеет использование идеи двойственности (([1, 2]), см. также обзор ([3]) и работы ([13, 14])).

Настоящая работа возникла из рассмотрения следующих конкретных задач теории функций комплексного переменного: (1) задачи о базисности системы Дирихле $(e^{\lambda_n z})$ в замыкании своей линейной оболочки в различных пространствах аналитических функций и (2) интерполяционной задачи о восстановлении целой функции $f(z)$ из определенного класса по ее значениям c_n в узлах интерполяции λ_n. Обе задачи, как мы показываем, связаны естественной двойственностью. Заметим, что соотношение вида $(1)\Rightarrow(2)$ в некоторых важных частных случаях по существу было доказано А. Ф. Леонтьевым ([4, 12]) (см. также ([15])).

В работе исследуется связь между базисностью системы (x_n) элементов локально-выпуклого пространства X в замыкании своей линейной оболочки и разрешимостью некоторой двойственной интерполяционной задачи в сопряженном пространстве X'.

2°. Пусть X — отделимое полное локально-выпуклое пространство, топология в котором задается набором полунорм $(\|\cdot\|_p,\ p\in P)$, X' — сильное сопряженное пространство. Пусть $\xi=(x_n,\ n=1,2,\dots)$ — некоторая последовательность элементов X, отличных от нуля. Введем в рассмотрение два пространства последовательностей, порождаемые системой ξ: пространство

$$E=\left\{c=(c_n):\ \forall p\in P\ |c|_p\overset{\text{def}}{=}\sum_n |c_n|\,\|x_n\|_p<\infty\right\}$$

с топологией, определяемой набором полунорм $(|c|_p,\ p\in P)$, и пространство *

$$E'=\left\{c'=(c_n'):\ \exists p\in P\ |c'|_p'\overset{\text{def}}{=}\sup_n\frac{|c_n'|}{\|x_n\|_p}<\infty\right\}$$

с топологией сильного сопряженного относительно двойственности, задаваемой формулой

$$\langle c',c\rangle=\sum_n c_n'c_n.$$

Эта топология, как нетрудно видеть, совпадает с топологией индуктивного предела, определяемой в E' системой неограниченных норм $(|c'|_p,\ p\in P)$ ([5, 6]). Будем изучать связь между следующими утверждениями:

(B) Последовательность ξ является базисом в своей замкнутой оболочке $F=\overline{\operatorname{span}\xi}$ в X.

---

* Полагаем, если нужно $1/0=\infty$ и $0/0=0$.

(I) Для любой последовательности $(t_n)\in E'$ существует $x'\in X'$ такой, что $x'(x_n)=t_n$, $n=1,\ldots$ (будем говорить также, что разрешима интерполяционная задача (X', ξ)).

(B') ξ образует регулярный базис в $F=\overline{\operatorname{span}\xi}$, т. е. всякий элемент $x\in F$ допускает единственное разложение $x=\sum_n c_n x_n$ такое, что

$$\forall p \exists q,\ C>0 \quad \sum_n |c_n| \|x_n\|_p \leqslant C\|x\|_q.$$

(I') Для всякого равностепенного непрерывного множества $A\subset E'$ найдется равностепенно непрерывное множество $B\subset X'$ такое, что

$$\forall (t_n)\in A,\quad \exists x'\in B \quad x'(x_n)=t_n,\quad n=1,\ 2,\ldots$$

(интерполяционная задача (X', ξ) равномерно разрешима).

3°. Лемма 1 ((5), следствия 8.6.9, 8.6.17 и теорема 8.6.13). *Пусть X, Y — отделимые локально-выпуклые пространства, X', Y' — сильные сопряженные пространства. Пусть T: $X\to Y$ — линейный непрерывный оператор, T': $Y'\to X'$ — оператор, сопряженный к T.*

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) *T — изоморфизм X в Y;*

б) *для всякого равностепенно непрерывного множества $A\subset X'$ найдется равностепенное непрерывное множество $B\subset Y'$ такое, что $T'(B)=A$.*

Если X и Y — F-пространства, то утверждение б) *можно заменить следующим:*

в) *$T'(Y')=X'$.*

Теорема 1. *Пусть X — отделимое полное локально-выпуклое пространство. Тогда:*

а) *(B') $\Leftrightarrow$ (I');*

б) *если X — F-пространство, то (B') $\Leftrightarrow$ (I).*

Доказательство. Рассмотрим операторы: T: $E\to X\,|\,Tc=\sum_n c_n x_n$, $c=(c_n)\in E$; T': $X'\to E'\,|\,T'(x')=(x'(x_n))$, $x'\in X'$. Это линейные непрерывные операторы, причем T' является сопряженным оператором для оператора T, поскольку

$$(T'x')(c)=\sum_n x'(x_n)c_n=x'\left(\sum_n c_n x_n\right)=x'(Tc),\quad x'\in X',\quad (c_n)\in E.$$

Утверждение теоремы теперь вытекает из леммы, если заметить, что утверждения (B'), (I) и (I') равносильны соответственно следующим:

а) T — изоморфизм $E\to X$;

б) $T'(X')=E'$;

в) для всякого равностепенно непрерывного множества $A\subset E'$ найдется равностепенно непрерывное множество $B\subset X'$ такое, что $T'(B)=A$.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы X ядерно. Тогда в ее формулировке (B') можно заменить эквивалентным ему утверждением:*

(B'') *(x_n) — равностепенно непрерывный базис в $F=\operatorname{span}(x_n)$.*

Действительно, в этом случае утверждение (B') $\Rightarrow$ (B'') очевидно, а (B'') $\Rightarrow$ (B') является простым следствием теоремы Дынина — Митягина об абсолютности равностепенно непрерывного базиса в ядерном пространстве (см. (7), теорема 10.2.1).

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы X — F-пространство. Тогда (B') эквивалентно условию:*

(B''') *(x_n) — абсолютный базис в F.*

Наиболее законченный результат получается для ядерных F-пространств.

Теорема 2. *Пусть X — ядерное F-пространство. Тогда*

$$(B') \Leftrightarrow (B) \Leftrightarrow (I) \Leftrightarrow (I').$$

4°. Приведем некоторые конкретные примеры. Пусть D — односвязная область, не содержащая бесконечно удаленной точки, CD — ее дополнение, $A(D)$ и $A(CD)$ — пространства аналитических функций, регулярных соответственно в D и на CD, с естественной топологией равномерной сходимости. Пусть $f(z)=\sum_0^\infty \mu_n z^n$ — целая функция, причем $\mu_n\neq 0$, $n=0, 1, \ldots$ Введем, следуя [2], класс (μ_n, D) всех целых функций $g(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ таких, что $\sum_0^\infty a_n\mu_n^{-1}z^{-n-1}=g_f(z)\in A(CD)$. Положим для произвольных элементов $x(z)\in A(D)$ и $g(z)\in(\mu_n, D)$:

$$\langle g, x\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_L x(t)\,g_f(t)\,dt,$$

где L — спрямляемый контур, разделяющий особенности $x(z)$ и $g_f(z)$.

Тогда, как легко видеть, билинейная форма $\langle g, x\rangle$ устанавливает двойственность между пространствами $X=A(D)$ и $X'=(\mu_n, D)$.

Пусть сначала $x_n^0=f(\lambda_n z)$, где (λ_n) — последовательность различных точек плоскости z, и пусть F_D — замыкание по топологии в $A(D)$ линейной оболочки последовательности (x_n). По теореме 2 (x_n^0) является базисом в F_D тогда и только тогда, когда разрешима интерполяционная задача $[(\mu_n, D), (x_n^0)]$. Полагая, в частности, $D=\{z: |z|<\infty\}$ и применяя критерий разрешимости интерполяционной задачи в классе $[\rho, \infty)$, принадлежащий А. Ф. Леонтьеву [8], получаем

Следствие 3. *Пусть $f(z)=\sum_0^\infty \mu_n z^n$, $\mu_n\neq 0$, $n=0, 1, \ldots,$*

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}|\mu_n|^{1/n}<\infty, \qquad \varliminf_{n\to\infty} n^{1/\rho}|\mu_n|^{1/n}>0, \qquad 0<\rho<\infty.$$

Пусть, далее, (λ_n) — последовательность различных комплексных чисел, $|\lambda_n|\uparrow\infty$, $n\to\infty$.

Для того чтобы последовательность $(f(\lambda_n z))$ была базисом в F_D, необходимо и достаточно, чтобы:

а) $\varlimsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}|\lambda_n|^{-1}<\infty$,

б) $\varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{1}{|\lambda_n|^\rho}\ln\dfrac{1}{|\psi_s'(\lambda_n)|}<\infty$;

здесь $\psi_s(z)=\prod_{\lambda_n\in D_s}(1-z^m/\lambda_n^m)$, m — целое число, $m>\rho$; D_s, $s=1, 2, \ldots, p$, — углы раствора, меньшего $2\pi/m$, покрывающие всю плоскость, причем соседние углы имеют непустое пересечение.

Используя тот факт, что все базисы в $A(D)$ квазиэквивалентны [9], получаем из теоремы 2 также

Следствие 4. *Пусть $(x_n(z))$ — полная система функций из $A(D)$. Интерполяционная задача $[(\mu_n, D), (x_n)]$ разрешима тогда и только тогда, когда существуют:* а) *последовательность положительных чисел (t_n),* б) *перестановка (j_n) ряда 0, 1, 2, ... и* в) *автоморфизм T пространства $A(D)$ такие, что $x_n=t_{j_n}T\omega^{j_n}$, $n=0, 1, \ldots,$ где $\omega(z)$ — функция, конформно отображающая область D на единичный круг.*

Справедливо также

Следствие 5 (см. [10]). *Пусть последовательность $(x_n(z))$ полна в $A(D)$, где D — круг $|z|<R$, $0<R<\infty$. Если разрешимы две интерполяци-*

онные задачи $[(\mu_n, D_1), (x_n)]$ *и* $[(\mu_n, D_2), (x_n)]$, *где* $D_i = \{z: |z| < r_i\}$, $0 < r_1 < r_2 \leq R$, *то существуют числа* R_1 *и* R_2 (*радиусы разрешимости*), *обладающие следующими свойствами:*

а) $0 \leq R_1 \leq r_1 < r_2 \leq R_2 \leq R$;

б) *любая задача* $[(\mu_n, D), (x_n)]$, *где* $D = \{z: |z| < r\}$, $R_1 < r \leq R_2$, *разрешима;*

в) *если* D *имеет непустое пересечение с кольцом* $R_1 < |z| < R_2$ *и* D *отлична от круга* $|z| < r$, *где* $R_1 < r \leq R_2$, *то интерполяционная задача* $[(\mu_n, D), (x_n)]$ *неразрешима.*

Такая ситуация имеет место, например, в случае, когда $f(z) = e^z$ и $x_n(z) = z^n e^{\lambda_n z}$, $|\lambda_n| \leq 1$, $n = 0, \ldots$ (вариант задачи Абеля — Гончарова). Здесь $R_1 = 0$, а $R_2 \geq w$, где w — постоянная Уиттекера, $0{,}729.. < w < 0{,}731..$ (см. ([2], [11])).

Результаты, изложенные в этой заметке, возникли следующим образом. М. М. Драгилев еще в 1964 г. (работа, к сожалению, не была опубликована) получил соотношение $(B) \Leftrightarrow (I')$ для случая, рассмотренного в 4°, при этом им, по существу были введены пространства E, E'. Позднее Ю. Ф. Коробейник, отправляясь от своих прежних работ (см., например, ([13])), независимо получил, используя двойственность типа леммы 1, простое доказательство утверждения $(B') \Leftrightarrow (I)$ (в несколько иных терминах); поскольку задача (I) была лучше изучена, нежели (I'), это позволило ему получить ряд разнообразных применений, которые будут изложены в отдельной статье. После того как результаты двух авторов были доложены одновременно на семинаре М. Г. Хапланова, В. П. Захарюта обратил внимание на связь между задачами (I) и (I'); по его инициативе было осуществлено значительное обобщение первоначальных результатов (при сохранении прежней схемы доказательства) и найдена более простая форма изложения, предлагаемая здесь.

Окончательный вид настоящей статьи является результатом усилий всех трех авторов.

Ростовский государственный
университет

Поступило
27 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. И. Маркушевич,* Матем. сборн., т. 17 (59), 211 (1945). [2] *М. А. Евграфов,* Интерполяционная задача Абеля-Гончарова, М., 1954. [3] *В. П. Хавин,* Пространства аналитических функций, Сборн. Итоги науки, Математический анализ, М., 1964, 1966. [4] *А. Ф. Леонтьев,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 39 (1951). [5] *Р. Эдвардс,* Функциональный анализ, М., 1969. [6] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов,* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. [7] *А. Пич,* Ядерные локально-выпуклые пространства, М., 1967. [8] *А. Ф. Леонтьев,* Матем. сборн., т. 41 (83), 81 (1957). [9] *М. М. Драгилев,* УМН, т. 15, в. 2 (92), 181 (1960). [10] *М. М. Драгилев,* Матем. сборн., т. 53 (95), 2, 207 (1961). [11] *Ю. К. Суетин,* Матем. сборн., т. 66 (108), 1, 142 (1965). [12] *А. Ф. Леонтьев,* Матем. сборн., т. 39 (81), 4, 405 (1956). [13] *Ю. Ф. Коробейник,* ДАН, т. 154, № 6, 1253 (1964). [14] *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов,* ДАН, т. 184, № 3, 550 (1969). [15] *Б. С. Павлов,* Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 11 (1968). [16] *В. Э. Кацнельсон,* Функц. анализ и его прилож., т. 1, № 2, 39 (1967).