Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. ЖАРОВ

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ШПЕККЕРА

(Представлено академиком П. С. Новиковым 25 VII 1973)

1. Э. Шпеккером в [1] построена неубывающая и ограниченная сверху последовательность рациональных чисел, для которой невозможен регулятор фундаментальности *. Любая последовательность с такими свойствами не имеет точной верхней грани в множестве FR-чисел. Вместе с тем для всякой неубывающей и ограниченной сверху последовательности рациональных чисел (FR-чисел, F-чисел соответственно) осуществимо псевдочисло, являющееся ее точной верхней гранью. В данной заметке будет показано, что для квазичисел имеет место аналог теоремы Шпеккера в следующей форме: *может быть указана неубывающая и ограниченная сверху последовательность квазичисел, для которой ни одно псевдочисло не является точной верхней гранью.*

2. Все утверждения в заметке понимаются конструктивно (см. [1]), в частности, под последовательностью рациональных (соответственно FR-, F-, квази-, псевдо-) чисел (п.р.ч.) понимается алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в рациональное число (соответственно FR-, F-, квази-, псевдочисло).

Мы считаем фиксированным некоторый достаточно широкий алфавит A. Все упоминаемые слова считаются словами в A, а все алгорифмы — нормальными алгорифмами в стандартном двухбуквенном расширении A. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгорифм, P — слово в A. Через $\{\mathfrak{A}\}$ мы обозначаем запись $\mathfrak{A}$, а через $\mathfrak{A}_P$ — построенный некоторым фиксированным способом алгорифм такой, что при любом слове Q в A

$$\mathfrak{A}_P(Q)\simeq\mathfrak{A}(P, Q).$$

К в а з и ч и с л а м и называются рациональные числа и слова вида $\{\mathfrak{A}\}\diamondsuit$, где $\mathfrak{A}$ — п.р.ч., для которой не может не существовать регулятор фундаментальности (см., например, [2] или [3]). П с е в д о ч и с л а м и называются рациональные числа и слова вида $\{\mathfrak{A}\}\diamondsuit$, где $\mathfrak{A}$ — п.р.ч. такая, что

$$\forall i \neg\neg\exists j \forall kl \quad (k, l\geqslant j\supset|\mathfrak{A}(k)-\mathfrak{A}(l)|<2^{-i}).$$

Буквы i, j, k, l, m, n (возможно, с индексами) в дальнейшем употребляются в качестве переменных для натуральных чисел, буква r (возможно, с индексами) — для рациональных чисел, буква q (возможно, с индексами) — для псевдочисел. Слово вида $q_1\triangle q_2$, где $q_1\leqslant q_2$, называется сегментом с концами q_1 и q_2. Будем говорить, что псевдочисло q принадлежит сегменту $q_1\triangle q_2$, если $q_1\leqslant q\leqslant q_2$.

3. Имеет место

Т е о р е м а. *Существует последовательность квазичисел α, обладающая следующими свойствами:*

1) $\forall n \quad 0\leqslant\alpha(n)\leqslant 1$,
2) $\forall n \quad \alpha(n)\leqslant\alpha(n+1)$,
3) $\forall q \exists r \quad r>0 \& \neg\neg\exists k \forall n (n\geqslant k\supset|\alpha(n)-q|\leqslant r)$.

---

* Все непоясняемые понятия конструктивного анализа могут быть найдены в [2] или в [3].

Наметим доказательство сформулированной теоремы.

Аналогично лемме 1 из [5] может быть доказана

Лемма 1. *Можно построить алгорифм $\mathfrak{A}$ такой, что*

1) $\mathfrak{A}_i$ *есть п.р.ч., для любого* i,

2) *для любого псевдочисла* q *существует* i *такое, что* $\mathcal{E}\mathfrak{A}_i \mathcal{3}\diamond$ *есть псевдочисло и* $q = \mathcal{E}\mathfrak{A}_i\mathcal{3}\diamond$.

Могут быть указаны алгорифмы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ такие, что для любых i, n, m

$$\mathfrak{B}(i, m) \simeq \mu j (\forall l \quad (j \leqslant l \leqslant m \supset |\mathfrak{A}_i(l) - \mathfrak{A}_i(j)| \leqslant 3^{-i-3})),$$

$$\mathfrak{C}(i, n, m) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}_i(\mathfrak{B}(i, m)), & \text{если } \mathfrak{B}(i, m) \leqslant n, \\ 1, & \text{если } \mathfrak{B}(i, m) > n. \end{cases}$$

Далее запись $\lim \mathfrak{R} = r$, где $\mathfrak{R}$ — п.р.ч будет означать, что

$$\neg\neg \exists j \forall m \quad m \geqslant j \supset \mathfrak{R}(m) \simeq r.$$

Число k назовем **индикатором сходимости** п.р.ч. $\mathfrak{A}_i$, если

$$\forall l \quad l \geqslant k \supset |\mathfrak{A}_i(l) - \mathfrak{A}_i(k)| \leqslant 3^{-i-3}.$$

Из определений алгорифмов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ вытекает следующая

Лемма 2. *Для любого* i:

1) *если не существует индикатора сходимости п.р.ч.* $\mathfrak{A}_i$, *то* $\lim \mathfrak{C}_{i,n} = 1$ *для любого* n;

2) *если* k — *наименьший индикатор сходимости п.р.ч.* $\mathfrak{A}_i$, *то при* $n < k$

$$\lim \mathfrak{C}_{i,n} = 1,$$

а при $n \geqslant k$

$$\lim \mathfrak{C}_{i,n} = \mathfrak{A}_i(k).$$

Обозначим через $\mathfrak{D}$ такой алгорифм, что

$$\mathfrak{D}(r, r_1 \triangle r_2) \simeq \begin{cases} r_1 \triangle (r_1 + {}^1/_3 (r_2 - r_1)), & \text{если } r \geqslant {}^1/_2 (r_1 + r_2), \\ (r_2 - {}^1/_3 (r_2 - r_1)) \triangle r_2, & \text{если } r < {}^1/_2 (r_1 + r_2). \end{cases}$$

Построим алгорифм $\mathfrak{E}$ такой, что

$$\mathfrak{E}(0, n, m) \simeq \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(0, n, m), 0 \triangle 1);$$

$$\mathfrak{E}(i+1, n, m) \simeq \mathfrak{D}(\mathfrak{C}(i+1, n, m), \mathfrak{E}(i, n, m)).$$

Легко видеть, что $\mathfrak{E}(i, n, m)$ для любых i, n, m есть сегмент с рациональными концами. Построим алгорифм $\mathfrak{F}$, перерабатывающий любое слово i, n, m в левый конец сегмента $\mathfrak{E}(i, n, m)$.

Из леммы 2 следует

Лемма 3. *Алгорифм* $\mathfrak{F}$ *при любых* i, n, m *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $0 \leqslant \mathfrak{F}(i, n, m) \leqslant 1$,

2) $\neg\neg \exists r \quad \lim \mathfrak{F}_{i,n} = r$ (*и, следовательно,* $\mathcal{E}\mathfrak{F}_{i,n}\mathcal{3}\diamond$ *есть квазичисло*),

3) $\mathcal{E}\mathfrak{F}_{i,n}\mathcal{3}\diamond \leqslant \mathcal{E}\mathfrak{F}_{i+1,\,n+1}\mathcal{3}\diamond$,

4) $\forall j \quad i \leqslant j \supset |\mathcal{E}\mathfrak{F}_{j,n}\mathcal{3}\diamond - \mathcal{E}\mathfrak{C}_{i,n}\mathcal{3}\diamond| \geqslant {}^1/_2 \cdot 3^{-i-1}$.

Применим теперь диагональную конструкцию, а именно, введем алгорифм Φ, для которого $\Phi(n, m) \simeq \mathfrak{F}(n, n, m)$ при любых n и m.

Из леммы 3 непосредственно следует

Лемма 4. *Алгорифм* Φ *при любых* n *и* m *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $0 \leqslant \Phi(n, m) \leqslant 1$,

2) $\neg\neg \exists r \quad \lim \Phi_n = r$ (*и следовательно,* $\mathcal{E}\Phi_n\mathcal{3}\diamond$ *есть квазичисло*),

3) $\mathcal{E}\Phi_n\mathcal{3}\diamond \leqslant \mathcal{E}\Phi_{n+1}\mathcal{3}\diamond$.

4) $\forall i \quad i \leqslant n \supset |\mathcal{E}\Phi_n\mathcal{3}\diamond - \mathcal{E}\mathfrak{C}_{i,n}\mathcal{3}\diamond| \geqslant {}^1/_2 \cdot 3^{-i-1}$.

Построим, наконец, алгорифм α такой, что $\alpha(n) \rightleftharpoons \mathcal{E}\Phi_n 3 \diamond$ при любом n. Легко видеть, что этот алгорифм удовлетворяет требованиям теоремы. В самом деле, утверждения 1) и 2) теоремы непосредственно следуют из утверждений 1) — 3) леммы 4. Остается доказать утверждение 3). В силу леммы 1 для этого достаточно доказать, что для любого i, если $\mathcal{E}\mathfrak{A}_i 3 \diamond$ есть псевдочисло, то

$$\neg\neg\exists j \forall n \quad n \geqslant j \supset |\mathcal{E}\Phi_n 3 \diamond - \mathcal{E}\mathfrak{A}_i 3 \diamond| \geqslant 3^{-i-2}.$$

Пусть $\mathcal{E}\mathfrak{A}_i 3 \diamond$ есть псевдочисло. Тогда п.р.ч. $\mathfrak{A}_i$ не может не иметь индикатора сходимости. Допустим, что k — наименьший индикатор сходимости п.р.ч. $\mathfrak{A}_i$. По лемме 2, если $n \geqslant k$, то $\lim \mathfrak{C}_{i,n} = \mathfrak{A}_i(k)$ и, следовательно $|\mathcal{E}\mathfrak{C}_{i,n} 3 \diamond - \mathcal{E}\mathfrak{A}_i 3 \diamond| \leqslant 3^{-i-3}$, так как $|\mathfrak{A}_i(k) - \mathcal{E}\mathfrak{A}_i 3 \diamond| \leqslant 3^{-i-3}$.

Положим $j \rightleftharpoons \max(i, k)$. Тогда для любого $n \geqslant j$ выполняется $|\mathcal{E}\mathfrak{C}_{i,n} 3 \diamond - \mathcal{E}\mathfrak{A}_i 3 \diamond| \leqslant 3^{-i-3}$, кроме того, по лемме 4 (п. 4) получаем

$$|\mathcal{E}\Phi_n 3 \diamond - \mathcal{E}\mathfrak{C}_{i,n} 3 \diamond| \geqslant {}^1/_2 \cdot 3^{-i-3}.$$

Следовательно,

$$|\mathcal{E}\Phi_n 3 \diamond - \mathcal{E}\mathfrak{A}_i 3 \diamond| \geqslant |\mathcal{E}\Phi_n 3 \diamond - \mathcal{E}\mathfrak{C}_{i,n} 3 \diamond| - |\mathcal{E}\mathfrak{C}_{i,n} 3 \diamond - \mathcal{E}\mathfrak{A}_i 3 \diamond| \geqslant$$
$$\geqslant {}^1/_2 \cdot 3^{-i-1} - 3^{-i-3} \geqslant 3^{-i-2},$$

что и требовалось доказать.

Пусть β — последовательность псевдочисел. Псевдочисло q называется верхней гранью β, если $\beta(i) \leqslant q$ при любом i. Число q называется точной верхней гранью β, если q есть верхняя грань и никакое меньшее псевдочисло не является верхней гранью β.

Следствие. *Пусть α — последовательность квазичисел, построенная согласно теореме. Невозможно псевдочисло, являющееся точной верхней гранью α.*

Более того, для всякой верхней грани q последовательности α может быть указано положительное рациональное число r так, что $q-r$ также является верхней гранью α.

Отметим также, что последовательность α, очевидно, не может сходиться (хотя бы даже и не эффективно) ни к какому псевдочислу.

Автор выражает благодарность Б. А. Кушнеру за ценные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Specker*, J. Symb. Logic, v. 14, 145 (1949). [2] *Н. А. Шанин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 67, 15 (1962). [3] *Б. А. Кушнер*, ДАН, т. 208, № 5, 1031 (1973). [4] *Н. А. Шанин*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 52, 226 (1958). [5] *Б. А. Кушнер, Г. С. Цейтин*, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР т. 8, 107 (1968).