Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 3

УДК 519.21 **МАТЕМАТИКА**

А. И. ИЛЬИНСКИЙ

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ КОМПОНЕНТАХ НЕКОТОРЫХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 VII 1973)

Мы будем пользоваться терминологией, принятой в монографии Ю. В. Линника и И. В. Островского ([1]).

Как известно (([1]), стр. 7), основной задачей теории разложений вероятностных законов является описание множества всех компонент данного закона F. Если закон F имеет неразложимые компоненты (в дальнейшем речь будет идти только о таких законах), то в первую очередь представляет интерес описание множества всех его неразложимых компонент. Это множество условимся в дальнейшем обозначать через $\mathfrak{N}(F)$. Описание множества $\mathfrak{N}(F)$ известно ([2–6]) лишь для немногих законов F, среди которых нет безгранично делимых (б.д.). В настоящей статье изучается множество $\mathfrak{N}(F)$ для некоторых б.д. законов F таких, что $\mathfrak{N}(F)\neq\phi$.

1°. Условимся обозначать через $G_{\lambda,a}$ геометрический закон с параметрами λ и a ($0<\lambda<\infty$, $0<a<1$), определяемый равенствами $G_{\lambda,a}(\lambda k+0)-G_{\lambda,a}(\lambda k)=(1-a)a^k$, $k=0,1,\ldots$ Как известно (([1]), стр. 125), $G_{\lambda,a}$ — б.д. закон. Не уменьшая общности (ср. ([1]), стр. 87), будем в дальнейшем рассматривать лишь такие компоненты F закона $G_{\lambda,a}$, для которых $S(F)\subset\{\lambda k\}_{k=0}^{\infty}$, где $S(F)$ — спектр закона F (([1]), стр. 83).

Геометрический закон $G_{\lambda,a}$ является слабым пределом при $n\to\infty$ своих компонент — так называемых «урезанных» геометрических законов $G_{\lambda,a,n}$, которые определяются равенствами $G_{\lambda,a,n}(\lambda k+0)-G_{\lambda,a,n}(\lambda k)=a^k(1-a)(1-a^n)^{-1}$, где $0<\lambda<\infty$, $0<a<1$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. Из результатов Краснера и Ранулак ([2]) легко получается описание множества $\mathfrak{N}(G_{\lambda,a,n})$. Оказывается, что спектры неразложимых компонент закона $G_{\lambda,a,n}$ являются конечными арифметическими прогрессиями с простым числом членов, а величины скачков образуют геометрическую прогрессию. Приводимая ниже теорема 1 показывает, что характер ограничений на спектр и величины скачков неразложимых компонент закона $G_{\lambda,a}$ существенно мягче. Эта теорема содержит, в частности, полное описание спектров законов из $\mathfrak{N}(G_{\lambda,a})$.

Прежде чем формулировать теорему 1, введем следующие обозначения. Пусть $S\subset(-\infty, \infty)$ — замкнутое множество, F — вероятностный закон, $\mathfrak{Z}_S$ — множество всех законов, спектр которых равен S, $\mathfrak{N}_S(F)=\mathfrak{Z}_S\cap\mathfrak{N}(F)$ — множество неразложимых компонент закона F, имеющих своим спектром S.

Теорема 1. *Пусть S — произвольное подмножество в $\{\lambda k\}_{k=0}^{\infty}$, содержащее не менее двух точек. Тогда множество $\mathfrak{N}_S(G_{\lambda,a})$ непусто. Кроме того, рассматриваемое как подмножество в $\mathfrak{Z}_S$ с топологией слабой сходимости законов оно обладает непустой внутренностью, если S ограничено.*

Отметим также следующее свойство класса $\mathfrak{N}(G_{\lambda,a})$.

Предложение 1. *Для любого неограниченного множества $S\subset\{\lambda k\}_{k=0}^{\infty}$ в $\mathfrak{N}_S(G_{\lambda,a})$ существуют законы, имеющие целые характеристические функции любого порядка ρ, $1<\rho\leqslant\infty$, с величиной типа $0\leqslant\sigma\leqslant\infty$.*

В доказательстве сформулированных утверждений используется

Лемма 1. *Пусть* $0<b<a<1$, p_0 — *произвольное положительное число. Если для всех* $k=1, 2, \ldots$ *выполняется* $0\leqslant p_k\leqslant p_0(a-b)b^{k-1}$, *то закон* F, *определенный равенствами*

$$F(\lambda k+0)-F(\lambda k)=p_k\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k\right)^{-1},\quad k=0,1,\ldots,$$

является компонентой закона $G_{\lambda,a}$.

Кроме того, мы применяем достаточный признак неразложимости закона с ограниченным спектром, принадлежащий Л. С. Кудиной ([7]), и один достаточный признак неразложимости закона с неограниченным спектром. Последний, как нам кажется, представляет самостоятельный интерес, поэтому мы сформулируем его в большей общности. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $|x|=\{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2\}^{1/2}$, $B_r(x)=y\in\mathbf{R}^n$: $|y-x|\leqslant r\}$, где $r\geqslant0$.

Лемма 2. *Пусть* P — *вероятностный закон в* $\mathbf{R}^n$. *Предположим, что существуют последовательность точек* $x_k\in\mathbf{R}^n$, $k=0, 1, \ldots$, *такая, что* $x_0=0$, $|x_{k+1}|>2|x_k|+1$ *для всех* k, *и последовательность неотрицательных чисел* $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ *такая, что* $r_0=0$, $r_k\to0$, $k\to\infty$, $r_{k+1}<|x_{k+1}|-|x_k|-r_k$, *причем выполняются следующие условия*:

(I) *числа* $c_k=P(B_r(x_k))$ *таковы, что* $c_k>0$, $c_{k+1}\leqslant\varkappa c_0c_k$ *для некоторого* $0<\varkappa<1/2$ *и всех* k;

(II) *последовательность чисел*

$$\delta_k=P(\{x:|x_k|+r_k<|x|\leqslant|x_{k+1}|+r_{k+1}\}\setminus B_{r_{k+1}}(x_{k+1}))$$

монотонно убывает и $(\delta_{k-1}+\delta_k)/c_k\to0$, $k\to\infty$;

(III) $c_0^2>P(\{x\})$ *для всех* $x\neq0$.

Тогда закон P *неразложимый.*

Лемма 2 является усилением одного утверждения из работы ([8]) и доказывается с помощью некоторой модификации приведенных там рассуждений.

2°. Показательным законом H называется абсолютно непрерывный закон с плотностью $h(x)=0$ при $x<0$ и $h(x)=e^{-x}$ при $x\geqslant0$. Закон H является б.д. (([9]), стр. 645). Заметим, что характеристическая функция (х.ф.) закона H равна $\varphi(t;\ H)=(1-it)^{-1}$. Не уменьшая общности, можно рассматривать лишь такие компоненты F закона H, для которых $S(F)\subset[0,\infty)$ (([1]), стр. 87).

Показательный закон H является слабым пределом при $\lambda\to\infty$ своих компонент — «урезанных» показательных законов H_λ с плотностью $h_\lambda(x)=0$ при $x\notin[0,\lambda]$ и $h_\lambda(x)=e^{-x}(1-e^{-\lambda})^{-1}$ при $x\in[0,\lambda]$. Опираясь на результаты Т. Льюпса ([3]), А. Тортра ([4]) получил описание множества $\mathfrak{N}(H_\lambda)$. Как и в случае «урезанного» геометрического закона, оказалось, что спектры неразложимых компонент закона H_λ являются конечными арифметическими прогрессиями с простым числом членов, а величины скачков образуют геометрическую прогрессию. Относительно неразложимых компонент закона H нами доказана следующая теорема, содержащая, в частности, описание множества их спектров.

Теорема 2. *Для всякого замкнутого множества* $S\subset[0,\infty)$, *содержащего не менее двух точек, множество* $\mathfrak{N}_S(H)$ *непусто. Кроме того, рассматриваемое как подмножество в* $\mathfrak{Z}_S$ *с топологией слабой сходимости законов оно обладает непустой внутренностью в предположении ограниченности* S.

В частности, в качестве S можно взять двухточечное множество $\{0,\beta\}$, где $\beta>0$. Нами получено полное описание класса $\mathfrak{N}_{\{0,\beta\}}(H)$.

Предложение 2. *Для того чтобы закон Бернулли с х.ф.* $q+pe^{it\beta}$ $(p>0,\ q>0,\ p+q=1)$ *являлся компонентой закона* H, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* $pq^{-1}\leqslant e^{-\beta}$.

В доказательстве теоремы 2 используется

Лемма 3. *Пусть F — закон, сосредоточенный на полуоси $[0, \infty)$, $\varphi(t; F)$ — его х.ф. Если $\int_0^\infty e^y dF(y) < \infty$ и $0 < \varepsilon \leqslant (2\int_0^\infty e^y dF(y))^{-1}$, то функция $(1+\varepsilon)[(1-it)(1+\varepsilon\varphi(t; F))]^{-1}$ является х.ф.*

Отметим также следующие разложения показательного закона в счетную композицию неразложимых законов:

$$(1-it)^{-1} = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1+e^{(it-1)p^k}+e^{(it-1)2p^k}+\ldots+e^{(it-1)(p-1)p^k}}{1+e^{-p^k}+e^{-2p^k}+\ldots+e^{-(p-1)p^k}}, \qquad (1)$$

где p — любое простое число.

3°. Обозначим через $F_{A,a,b}$ абсолютно непрерывный закон с плотностью $A_0 \exp[bx - Ae^{ax}]$, A_0, A, a, b — положительные постоянные. Такие законы были введены в работе ([10]), безграничную делимость этих законов доказал С. Г. Малошевский ([11]). Поскольку х.ф. закона $F_{A,a,b}$ дается равенством ([11])

$$\varphi(t; F_{A,a,b}) = A^{-it/a}\,\Gamma\left(\frac{it+b}{a}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{b}{a}\right),$$

то из представления Г-функции бесконечным произведением следует, что законы с х.ф. $[1+it/(na+b)]^{-1}$, $n=0, 1, \ldots$, являются компонентами зазакона $F_{A,a,b}$. Поэтому из теоремы 2 следует, что $\mathfrak{N}_S(F_{A,a,b}) \neq \emptyset$ для любого замкнутого множества S, ограниченного справа и содержащего не менее двух точек. Из формулы (1) нетрудно получить представление закона $F_{A,a,b}$ в виде счетной композиции своих неразложимых компонент.

4°. Рассмотрим законы с х.ф.

$$(1+t^2)^{-1}, \quad (\operatorname{ch} t)^{-1}, \quad e^{-|t|^\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1, \quad (1+|t|)^{-\gamma},\ \gamma>2, \qquad (2)$$

Эти законы являются б.д. (([9]), стр. 645).

Теорема 3. *Пусть F — один из законов с х.ф. (2), а $S \subset (-\infty, \infty)$ — замкнутое множество, содержащее не менее двух точек.*

Тогда множество $\mathfrak{N}_S(F)$ непусто. Кроме того, рассматриваемое как подмножество в $\mathfrak{Z}_S$ с топологией слабой сходимости законов оно обладает непустой внутренностью при дополнительном предположении ограниченности S.

Выражаю глубокую признательность проф. И. В. Островскому за постановку задачи и ценные замечания.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
26 VII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю. В. Линник, И. В. Островский,* Разложения случайных величин и векторов, М., 1972. [2] *M. Krasner, B. Ranulac,* C. R., v. 204, № 6, 397 (1937). [3] *T. Lewis,* J. Appl. Prob., v. 4, 529 (1967). [4] *A. Tortrat,* ibid., v. 6, 177 (1969). [5] *E. Lukacs,* Proc. of 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., v. 2, Part 1, 401 (1967). [6] *H. Teicher,* C. R., v. 246, № 5, 694 (1958). [7] *Л. С. Кудина,* ДАН, т. 204, № 1, 25 (1972). [8] *Л. С. Кудина,* Теория функций, функц. анализ и их приложения, в. 16, 206 (1972). [9] *В. Феллер,* Введение в теорию вероятностей и ее применения, т. 2, М., 1967. [10] *А. М. Каган, Ю. В. Линник* и др., Sankhyā, Ser. A, v. 33, № 3, 255 (1971). [11] *С. Г. Малошевский,* Теория функций, функц. анализ и их приложения, в. 16, 212 (1972).